



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Informática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

## MODELO DE PERCOLAÇÃO BIDIMENSIONAL COM DEPENDÊNCIA LOCAL

Jaelson dos Santos Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Prof. Sérgio de Carvalho Bezerra  
D.Sc.

João Pessoa  
Julho de 2018

M21m      Oliveira, Jaelson dos Santos  
              Modelo de percolação bidimensional com dependência local /  
              Jaelson dos Santos Oliveira. – João Pessoa, 2018.  
              65, f.: il.;  
              Orientador: Prof. Sérgio de Carvalho Bezerra D.Sc.  
              Dissertação (mestrado) – UFPB/CI/PPGMMC.  
              Referências Bibliográficas: p. 47 – 47.  
              1. Grafos. 2. Grafos Planares. 3. Percolação.

UFPB/BC

CDU: 719.6(043)

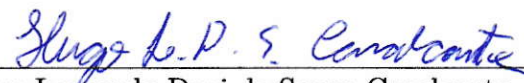
MODELO DE PERCOLAÇÃO BIDIMENSIONAL COM DEPENDÊNCIA  
LOCAL

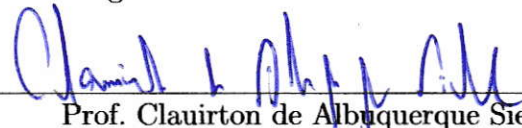
Jaelson dos Santos Oliveira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL  
(PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL  
DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM  
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

  
Prof. Sérgio de Carvalho Bezerra, D.Sc.

  
Prof. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante, Ph.D.

  
Prof. Claurton de Albuquerque Siebra, D.Sc.

*Aos meus pais, demais  
familiares, a minha esposa Suênia  
e Júlia minha filha amada*

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por tudo que aconteceu e há de acontecer em minha vida, aos meus pais (criação) Severino Benício de Oliveira (in memorian) e Josefa Severina de Oliveira (in memorian), aos meus pais (biológicos) Geraldo Benício de Oliveira e Estelina dos Santos Oliveira. Aos meus familiares com palavras de conforto e incentivos que levarei como ensinamentos de vida. A tia Ana, Dora, Naldo, Galego, meus irmãos Selma Maria e José Wellington e aos demais membros da família muito obrigado.

Dedico esse parágrafo aos meus colegas de sala, todos sem exceção, pois diante de muitos altos e baixos que passamos durante o curso, conseguimos galgar mais um degrau, sempre ajudando um ao outro e assim foi durante todo curso, compartilhamos conhecimento e isso nos ajudou bastante, fortalecendo assim nossas amizades. Aos meus amigos do Piauí, Rio Grande do Norte e Paraíba, inclusive aqueles que por motivos diversos não chegaram a conclusão do curso, mas abrilhantaram a sala no tempo que se fizeram presente.

Aos meus professores, que de forma admirável e aprendizado invejável nos ensinam conteúdos que vêm a complementar não só o âmbito profissional, mas todo o aprendizado de vida. Esses professores passaram a fazer parte diretamente de minha vida, especialmente o meu amigo/professor orientador D.Sc. Sérgio de Carvalho Bezerra, no qual tenho como inspiração e falo a todos os meus alunos o orgulho que sinto por ser o seu discente, além de tentar ser para eles o que Sérgio é para mim, um excelente professor.

Aos professores da banca, o professor D.Sc. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante, o qual tive a enorme satisfação de ser seu aluno e admirar o grau de sapiência e desenvoltura na regência de suas aulas. Ao professor D.Sc. Alberto Masayoshi Faria Ohashi, que a convite do professor D.Sc. Sérgio de Carvalho Bezerra meu orientador, se fez presente deixando-nos bastante agraciado com a sua presença.

Aos meus Irmãos da Águia do Oriente N°19, que tiveram paciência e sabedoria em entender o período que estive afastado para os estudos. Muito obrigado meus irmãos, S.: F.: U.:.

A Suênia minha esposa, pois só ela sabe o que passou nesse período, aguentando aborrecimentos que não lhe pertencia, comungando dos meus choros e agonias e vi-

venciando minhas alegrias. Como não agradecer a uma mulher como essa!? obrigado minha esposa, sem você não sei se seria possível concluir essa jornada.

A minha filha Júlia Vitória, que todos os dias me motiva com o seu carinho e reconhecimento. Júlia foi a força motriz necessária para o engajamento e o "Antídoto" necessário para as inúmeras noites sem dormir estudando para assimilar os conteúdos. Minha filha, que esse trabalho seja uma inspiração para você e que em um futuro bem próximo espero que você estude com docentes tão bons o quanto aos que me ensinaram.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## MODELO DE PERCOLAÇÃO BIDIMENSIONAL COM DEPENDÊNCIA LOCAL

Jaelson dos Santos Oliveira

Julho/2018

Orientador: Prof. Sérgio de Carvalho Bezerra D.Sc.

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Em nosso trabalho apresentaremos um breve resumo histórico do surgimento do objeto matemático abstrato chamado grafo. Além de conceitos, definições e suas teorias com aplicações voltadas para o dia-a-dia e modelos utilizados, seja de forma intuitiva ou não. Conheceremos a definição de grafos planares. Nós podemos destacar o caso da resolução de um sistema elétrico usando grafos ou as redes sociais.

Aprofundando os nossos estudos, entraremos no assunto de percolação. O modelo original de percolação envolve os pontos do  $Z^2$  onde cada ponto pode ter uma aresta aberta ou fechada conectada a cada um de seus vizinhos com probabilidade  $p$  de forma independente uns dos outros. O nosso estudo ocorrerá, também, no plano bidimensional ou seja no  $Z^2$ . Nós dizemos que existe percolação quando existe uma probabilidade positiva de que no processo ocorra um caminho aleatório partindo da origem com um número infinito de arestas.

O nosso modelo probabilístico é formado por dois tipos de fluidos (cores azul e vermelho). Diferente do modelo inicial, nós percorremos os vértices de  $Z^2$  de uma maneira determinística (em espiral no sentido anti-horário). A cada vértice sorteamos uma direção que ainda não tenha sido ocupada, escolhida uniformemente em seguida sorteamos o tamanho do elo que será construído, Tal elo pode ser representado por uma aresta de tamanho 0, 1 e 2, respectivamente, ao elo que não passa fluido (tamanho 0), ou uma aresta vermelha de tamanho 1 ou azul de tamanho 2. A escolha do tamanho de cada elo é dada por uma variável aleatória binomial de parâmetros  $n = 2$  e  $p$ . Vale destacar, que no nosso modelo existe uma alta dependência entre os elos vizinhos.

A nossa intuição é de que existam dois valores críticos para o modelo, nós chamamo-os de  $p_v$  e  $p_a$ , onde para todo valor de  $p < p_v$  não existe percolação,

para  $p_v < p < p_a$  exista percolação tanto para o fluido vermelho quanto para o azul, e no caso de  $p > p_a$  só exista percolação para o fluido azul.

Consequentemente, nós simulamos o modelo em diferentes escalas e para diferentes valores de  $p$  e usando uma construção gráfica com a intenção de visualizarmos melhor o processo físico.



Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## TWO-DIMENSIONAL PERCOLATION MODEL WITH LOCAL DEPENDENCE

Jaelson dos Santos Oliveira

July/2018

Advisor: Prof. Sérgio de Carvalho Bezerra D.Sc.

Program: Computational Mathematical Modelling

In our work we will present a brief historical summary of the emergence of the abstract mathematical object called graph. In addition to concepts, definitions and their theories with day-to-day applications and models used either intuitively or not. We will know the definition of planar graphs. We can highlight the case of solving an electrical system using graphs or social networks.

Deepening our studies, we will enter into the subject of percolation. The original percolation model involves the points  $Z^2$  where each point can have an open or closed edge connected to each of its neighbors with probability  $p$  independently of each other. Our study will also take place in the two - dimensional plane or in the  $Z^2$ . We say that there is percolation when there is a positive probability that a random path will occur in the process from the origin with an infinite number of edges.

Our probabilistic model consists of two types of fluids (blue and red colors). Different from the initial model, we traverse the vertices of  $Z^2$  in a deterministic manner (spiral counterclockwise). At each vertex we draw a direction that has not yet been occupied, chosen uniformly, then we draw the size of the link that will be constructed, Such a link can be represented by an edge of size 0.1 and 2, respectively, to the link (size 0), or a red edge of size 1 or size 2 blue. The size of each link is given by a random binomial variable of parameters  $n = 2$  and  $p$ . It is worth mentioning that in our model there is a high dependence between neighboring links.

Our intuition is that there are two critical values for the model, we call them  $p_v$  and  $p_a$ , where for every value of  $p < p_v$  there is no percolation, for  $p_v < p < p_a$  there is percolation for both red and blue fluid, and in the case of  $p > p_a$  there is only percolation to the blue fluid.

In order to better visualize the physical process, we simulate the model at different scales and for different values of  $p$  and using a graphical construct.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução da pesquisa . . . . .	1
1.2 Um breve contexto histórico . . . . .	1
1.3 Motivação . . . . .	3
1.4 Objetivos e possíveis resultados . . . . .	3
1.5 Resumo dos Capítulos . . . . .	3
<b>2 Teoria dos Grafos</b>	<b>5</b>
2.1 Definições . . . . .	5
2.2 Grau do vértice de um grafo . . . . .	9
2.3 Aplicações . . . . .	11
<b>3 Grafos Planares</b>	<b>15</b>
3.1 Definições . . . . .	15
3.2 Fórmula de Euler . . . . .	16
3.3 Aplicação de grafos planares em circuitos elétricos . . . . .	19
<b>4 Probabilidade e Percolação</b>	<b>22</b>
4.1 Modelo probabilístico . . . . .	22
4.2 A percolação . . . . .	26
4.3 Representação de elos independentes . . . . .	26
<b>5 Modelo, Simulação e Resultados</b>	<b>34</b>
5.1 Modelo . . . . .	34
5.2 Simulação de sistemas com dois possíveis níveis de percolação no $Z^2$ .	36
5.3 Exposição dos resultados obtidos computacionalmente . . . . .	37
5.3.1 Imagens da Simulação . . . . .	38
5.3.2 Simulação do processo para " $n$ " fixo e variando " $p$ " . . . . .	40
5.3.3 Simulação do processo para $p$ fixo e variando $n$ . . . . .	44

5.3.4	Simulação para um valor de probabilidade $p$ fixa em 0.5 com diferentes tipos de malhas. . . . .	44
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>46</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>
<b>A</b>	<b>Programas</b>	<b>48</b>
A.1	Programa gerador do grafo - ponte de Königsberg ( Figura 1.2 ) . . .	48
A.2	Programa gerador do grafo - Relação de membros da família ( Figura 2.1 ) . . . . .	50

# Lista de Figuras

1.1	Cidade de Königsberg - Fonte: <a href="http://www.mat.uc.pt/alma/escolas/pontes/">http://www.mat.uc.pt/alma/escolas/pontes/</a> . . . . .	2
1.2	Modelagem Matemática das pontes de Königsberg - Construída pelo autor . . . . .	2
2.1	Grafo mostrando a relação entre membros da família - construída pelo autor . . . . .	6
2.2	Diagrama de um grafo - [7] . . . . .	7
2.3	Grafo nulo - construída pelo autor . . . . .	7
2.4	Grafos vértices adjacente - construído pelo autor . . . . .	8
2.5	Grafos de elos adjacentes - construído pelo autor . . . . .	8
2.6	Grafos simples - construído pelo autor . . . . .	8
2.7	Grau do vértice - [7] . . . . .	9
2.8	Grafo com 9 vértices e 12 elos - [7] . . . . .	10
2.9	Soma dos graus do vértice - [7] . . . . .	10
2.10	Fonte: <a href="https://aniversariovoizaura.wordpress.com/">https://aniversariovoizaura.wordpress.com/</a> . . . . .	12
2.11	Fonte: <a href="http://s2.glbimg.com/iyEQ51L0ZsPH_LugOJzL605c2c=/s.glbimg.com/jo/g1/f/original/2014/03/14/mudanca_arra.jpg">http : //s2.glbimg.com/iyEQ51L0ZsPH_LugOJzL605c2c = /s.glbimg.com/jo/g1/f/original/2014/03/14/mudanca_arra.jpg</a> . . . . .	12
2.12	Fonte: <a href="http://www.mapas-brasil.com/imagens/paraiba.jpg">http://www.mapas-brasil.com/imagens/paraiba.jpg</a> . . . . .	13
2.13	Conexão entre pessoas - construído pelo autor . . . . .	14
3.1	Grafo planar - construída pelo autor . . . . .	16
3.2	Grafo não planar - construída pelo autor . . . . .	16
3.3	Grafo plano de 4 faces . . . . .	17
3.4	Grafo plano de 5 faces . . . . .	17
3.5	Grafo plano de 5 faces . . . . .	17
3.6	Grafo plano de 7 faces . . . . .	18
3.7	Grafos planos isomorfos . . . . .	19
3.8	Circuito planar/não planar [2] . . . . .	20
3.9	Árvore do grafo [2] . . . . .	21
4.1	Tabela dois dados - construída pelo autor . . . . .	22

4.2	Lançando 2 dados e vendo todas as possibilidades do resultado ser 8 - construída pelo autor . . . . .	23
4.3	plano $Z^2$ e $Z_*^2$ . . . . .	31
4.4	plano $Z^2$ e $Z_*^2$ . . . . .	31
4.5	aglomerado de elos . . . . .	32
5.1	construída pelo autor - Malha inicial . . . . .	34
5.2	construída pelo autor - Simulação explicando a dinâmica do programa	35
5.3	construída pelo autor - Simulação explicando a dinâmica do programa	35
5.4	construída pelo autor - Simulação explicando a dinâmica do programa	36
5.5	construída pelo autor . . . . .	37
5.6	construída pelo autor - com probabilidade $p=0.5$ . . . . .	38
5.7	construída pelo autor - com probabilidade $p=0.7$ . . . . .	39
5.8	construída pelo autor - com probabilidade $p=0.9$ . . . . .	39
5.9	construída pelo autor - Imagem da tabela construída no excel . . . .	40
5.10	construída pelo autor - Imagem da tabela construída no excel . . . .	40
5.11	construída pelo autor - Imagem da tabela construída no excel . . . .	41
5.12	construída pelo autor - Imagem da tabela construída no excel . . . .	41
5.13	construída pelo autor . . . . .	42
5.14	construída pelo autor - Tabela da função $f_n(p)$ . . . . .	42
5.15	construída pelo autor - gráfico da função $f_n(p)$ . . . . .	43
5.16	construída pelo autor: Resultado geral das simulações . . . . .	44
5.17	construída pelo autor . . . . .	45
5.18	construída pelo autor . . . . .	45
5.19	$p$ fixo, malha $9 \times 9$ . . . . .	45

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução da pesquisa

Iniciaremos o nosso trabalho de pesquisa contando o surgimento da primeira modelagem matemática conhecida até os dias atuais, do conceito de um grafo, pois em toda a pesquisa bibliográfica realizada todas apontam para um mesmo mentor: Leonhard Euler, e a partir do conhecimento desenvolvido e modelado na situação apresentada por Euler, muitos outros raciocínios apareceram para contribuir com uma boa parte da tecnologia que conhecemos hoje. Tendo o grafo como uma das pilstras que sustenta nosso trabalho de pesquisa, iremos mostrar algumas definições, e alguns tipos, além da importância, suas aplicações, e contribuições para o surgimento de novas tecnologias.

A outra pilstra de sustentação do nosso trabalho e objetivo principal está relacionado a percolação e sua relação com grafos. Nós construímos uma possível generalização do modelo de percolação inicial (modelo de Bernoulli). Diferente do modelo de Bernoulli, o nosso modelo tem um alto grau de dependência. Um cálculo teórico da existência de percolação do nosso modelo nos parece bem difícil. Assim, a simulação de tal modelo nos dá uma luz do que seria o resultado teórico. Nosso modelo, fisicamente, simula o comportamento computacional de dois fluidos no  $Z^2$ , para isso iremos simular na linguagem de programação Python uma malha e realizar sorteios aleatórios para verificar se os fluidos possuem cada um deles um caminho que parte da origem e atinge a fronteira de uma certa malha.

### 1.2 Um breve contexto histórico

Nos diversos materiais pesquisados sobre o surgimento da teoria dos grafos e suas aplicações, todos nos remetem a Leonhard Euler e está diretamente associado as 7 (sete) pontes da cidade de Königsberg da antiga Prússia, conhecida atualmente

como Kaliningrado, hoje Rússia. Nessa cidade existiam sete pontes situadas numa ilha do rio Pregel, conforme podemos observar a figura 1.1 abaixo:

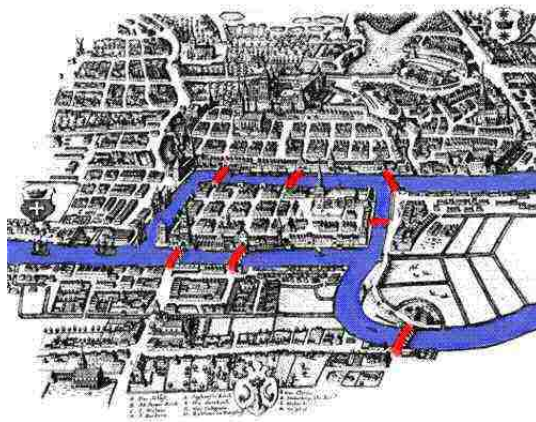


Figura 1.1: Cidade de Königsberg - Fonte: <http://www.mat.uc.pt/alma/escolas/-pontes/>

Os cidadãos daquela cidade debatiam entre si qual era a possibilidade de atravessar todas as pontes uma única vez e retornar ao local inicial sem repetir o percurso por uma mesma ponte. É justamente nesse contexto histórico que entra: Euler, que 1736 usou um raciocínio elementar para tentar solucionar o problema com os critérios apresentados, ele provou que não existia caminho que possibilitasse o percurso do problema apresentado pelos moradores daquela cidade. E para demonstrar que não era possível realizar tal trajetória, ele observou que o desenho ficaria mais simples trocando as áreas de terra por pontos e as pontes por linhas. Com esse pensamento, Euler realizou a primeira modelagem matemática conhecida no estudo dos grafos, conforme podemos observar na figura 1.2 logo abaixo.

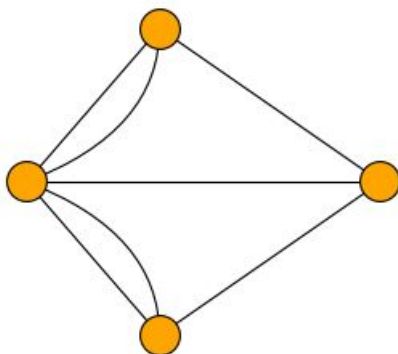


Figura 1.2: Modelagem Matemática das pontes de Königsberg - Construída pelo autor

Através dessa modelagem, Euler concluiu o seguinte raciocínio: para atravessar cada região são gastos exatamente dois elos, uma para entrar e outra para sair



dela. Ele utilizou a mesma lógica para os vértices, uma para entrar e outra para sair. Logo observou que cada região deverá conter um numero par de pontes para que fosse possível atender ao problema, no caso das 7 pontes de Königsberg, onde todas as regiões contem exatamente uma quantidade impar de pontes, com isso era impossível chegar a solução.

Dessa forma, Euler definiu um caminho ou circuito Euleriano para um grafo no qual ele também chamou Eulerianos, que todos os vértices precisam ser de um grau par; porém não bastava apenas essa condição, outra é que o grafo tem de ser conexo, ou seja, tem que existir um caminho por todo os pares de vértices.

## 1.3 Motivação

A Teoria dos Grafos possui aplicações diretas em áreas como física, química, engenharias, psicologia, etc. Em particular, ela é de fundamental importância aos cursos de Ciência e Engenharia da Computação. Isto se deve a inúmeros motivos, entre eles, o fato de servir de modelo matemático para alguns dos problemas mais importantes e difíceis da computação.

Estes problemas estão associados à classe de problemas NP-Completo, cuja solução em tempo polinomial por uma máquina de turing determinística não é conhecida. Vários problemas do mundo real podem ser analisados usando a Teoria dos Grafos, por exemplo, o escalonamento de processos pode ser visualizado como um aplicação direta do problema de coloração de grafos; o problema de reconhecimento de padrões pode ser visto como uma instância do problema de isomorfismo em grafos.

Já para o estudo de percolação nós iremos analisar o comportamento de dois fluidos em um meio poroso, observando o seu comportamento na tentativa de encontrar a existência de um caminho de tamanho infinito com probabilidade positiva.

## 1.4 Objetivos e possíveis resultados

Nosso objetivo principal é simular e visualizar computacionalmente um processo físico (percolação) com dois tipos de fluidos (vermelho e azul). A originalidade de nosso trabalho surge do alto grau de dependência na construção dos elos.

## 1.5 Resumo dos Capítulos

O primeiro capítulo trata de detalhar a história da primeira modelagem matemática que conhecemos até os dias atuais, e está relacionada as sete pontes de

Königsberg, e como Leonard Euler conseguiu mostrar para a população da época como seria possível solucionar o problema apresentado pelos moradores daquela cidade.

No segundo capítulo, abordaremos sobre as teorias dos grafos com as suas principais definições, ilustrações e alguns exemplos, além de verificarmos o grau do vértice de um grafo e as suas aplicações assim como a importância no estudo das novas tecnologias.

O nosso terceiro capítulo está voltado ao estudo dos grafos planares, uma forma diferenciada de apresentar um grafo, associada ao conceito de planaridade, até porque encontramos muitas relações desse grafo com as aplicações no mundo real.

No quarto capítulo, abordaremos algumas definições probabilísticas que embasam justamente o estudo de percolação, além de termos um breve contexto histórico de como se deu o primeiro processo, definindo assim a percolação através de Broadbent e Hammersley, além de observar como se dá o processo de percolação em duas dimensões.

Ao chegarmos no capítulo cinco descrevemos explicitamente o nosso modelo e como foram feitas as simulações e os resultados obtidos.

Por fim, no sexto e último capítulo mostramos as conclusões a que chegamos com as implementações que foram realizadas e as perspectivas para futuros trabalhos.

# Capítulo 2

## Teoria dos Grafos

### 2.1 Definições

Um grafo é  $G = (V, E)$  como uma estrutura finita e não vazia formada pelos conjuntos  $V$  de vértices ou nós existente, com  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  e  $E$  o conjunto de todos as arestas ou elos, onde cada elo pertence ao conjunto  $V \times V$ . Podemos também representar um grafo da seguinte forma  $G = (V, E)$ , onde  $V = V(G)$  e  $E = E(G)$ . Podemos estender a noção de grafo para  $V$  sendo um conjunto infinito, mas enumerável.

Chamamos de grafo trivial quando  $|V| = 1$  isto é, quando constituído por apenas um vértice. Mas adiante poderemos observar alguns tipos de grafos, entre eles: Grafo trivial, simples, valorado, não valorado, direcionado, não direcionado, multigrafo, hipergrafo orientado e hipergrafo não orientado.

Em nossa pesquisa usaremos os grafos não direcionados, com a mesma definição apresentada acima, no qual os elementos de  $V$  são os vértices e  $E$  os elos, e cada elo  $e \in E$  definindo assim como um par de vértices  $e = (v, w)$  que a constitui nessa forma. As extremidades desses elos são formadas justamente por  $v$  e  $w$ , dois elos que tem a mesma extremidade são conhecidas como adjacentes.

Podemos representar um grafo com sua visualização geométrica, em que seus vértices correspondem a pontos diferentes no plano cartesiano em qualquer coordenada e sem necessidade de uma ordem lógica para a ordenação dos vértices, e cada elo  $e = (v, w)$  está unindo os pontos correspondentes a  $v$ ,  $w$ . Em nosso caso a construção do grafo será condicionada a uma organização lógica dentro de um plano cartesiano para uma melhor apresentação. Tomemos a seguinte situação:

O grafo  $G(V, E)$  dado por:

$V = \{ p \mid p \text{ é uma pessoa} \}$

$E = \{ (v, w) \mid v \text{ é amigo de } w \}$

Com a definição representada acima, podemos dizer que foi formada toda a uma família de grafos, onde essa família é dada por:

$$V = \{ \text{Ana, Marcos, Aline, Max} \}$$

$$E = \{ (\text{Ana, Marcos}), (\text{Marcos, Ana}), (\text{Aline, Ana}), (\text{Ana, Aline}), (\text{Marcos, Max}), (\text{Max, Ana}) \}$$

Observe a (figura 2.1) nela podemos observar a relação existente entre os membros da família que compõem o conjunto  $V$  e as correspondências formadas no conjunto  $E$ .

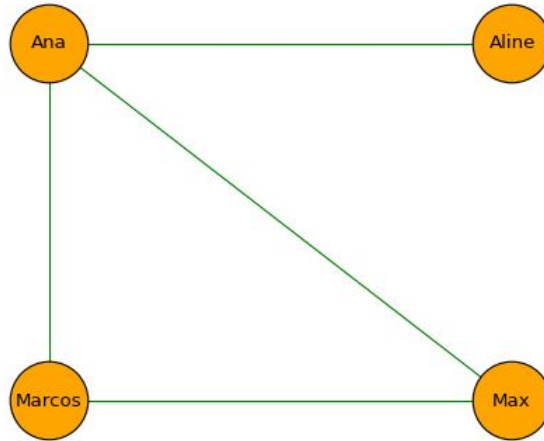


Figura 2.1: Grafo mostrando a relação entre membros da família - construída pelo autor

De acordo com a definição de grafo, podemos observar o seguinte exemplo:

**Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: [7],[6]**

Seja o grafo  $G = (V, E)$ , tal que:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} \text{ e}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$$

e as extremidades expressas por:

$$e_1 \longleftrightarrow (a, b), e_2 \longleftrightarrow (b, c), e_3 \longleftrightarrow (c, c), e_4 \longleftrightarrow (c, e), e_5 \longleftrightarrow (d, f), e_6 \longleftrightarrow (d, f), e_7 \longleftrightarrow (c, d), e_8 \longleftrightarrow (c, f), e_9 \longleftrightarrow (e, f), e_{10} \longleftrightarrow (g, h), e_{11} \longleftrightarrow (h, h), e_{12} \longleftrightarrow (h, i).$$

a figura 2.2 mostra a representação em diagrama do grafo  $G$ .

Como podemos observar a figura 2.2 é possível que o conjunto de elos  $E$  seja vazio.

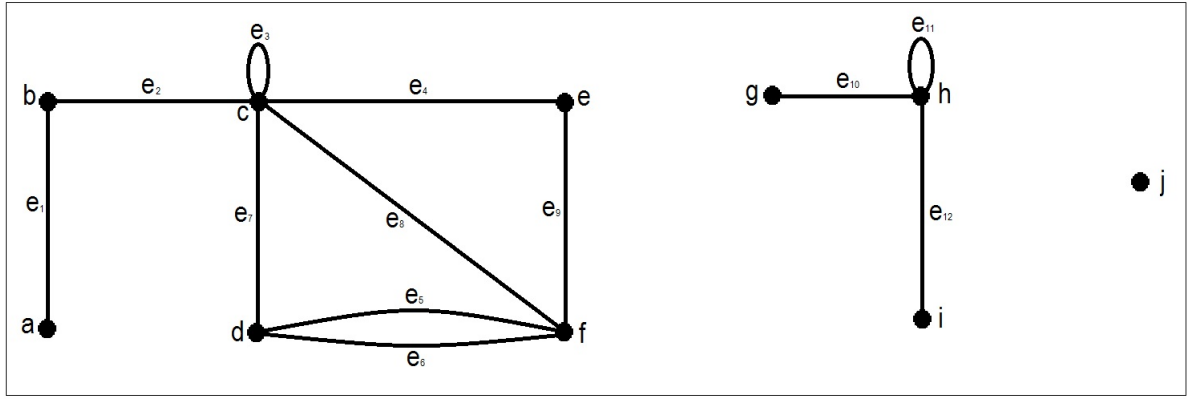


Figura 2.2: Diagrama de um grafo - [7]

Um grafo que tem um conjunto de elos vazio é chamado de grafo nulo. Observem a figura 2.3 onde temos o diagrama de um grafo nulo com 4 (quatro) vértices. Por outro lado, a definição de grafo exige que o conjunto de vértices seja não vazio, caso contrário, não se tem grafo.

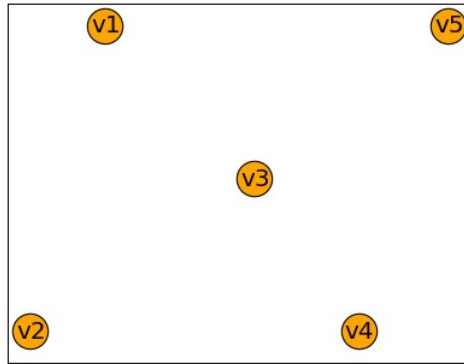


Figura 2.3: Grafo nulo - construída pelo autor

Usaremos as definições de [7] Nicoletti e Hruschka para embasarmos os grafos construídos nessa seção.

- Se dois (ou mais) elos de  $G$  têm os mesmos vértice-extremidade, essas elos são chamadas *elos adjacentes ou paralelas* ( por exemplo, os elos  $e_5$  e  $e_6$  do grafo da figura 2.2).
- Um vértice de  $G$  que não é extremidade de qualquer elo é chamado *isolado* ( por exemplo, o vértice  $j$  do grafo da figura 2.2).
- Dois vértices que estão unidos por um elo são chamados *adjacentes* ou *vizinhos* por exemplo, os vértices  $a$  e  $b$  do grafo da figura 2.2.
- Dois elos distintos  $e_i$  e  $e_j$  são *adjacentes* se tem um vértice em comum. Por exemplo, os elos  $e_1$  e  $e_2$  no grafo da figura 2.4 e figura 2.5.

- O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo  $v$  de  $G$  é chamado conjunto vizinhança de  $v$  e é denotado por  $N(v)$ . No grafo da figura 2.2 por exemplo,  $N(f) = \{c, d, e\}$ .
- Um grafo é chamado simples se não tiver laço, nem elos paralelos (por exemplo, o grafo mostrado na figura 2.6)

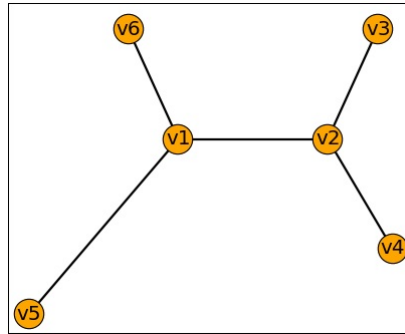


Figura 2.4: Grafos vértices adjacente - construído pelo autor

Podemos observar na figura acima que os vértices  $v_1$  e  $v_2$  são adjacentes.

Já na figura 2.5 logo abaixo temos os elos  $e_1$  e  $e_2$  adjacentes.

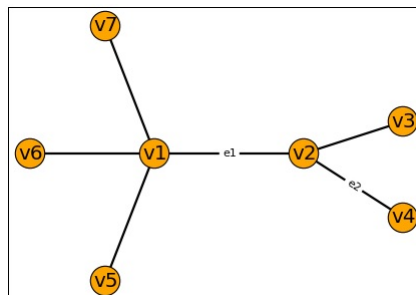


Figura 2.5: Grafos de elos adjacentes - construído pelo autor

De acordo com a definição de grafos e grafo simples podemos ver a ilustração dessa definição na figura 2.6

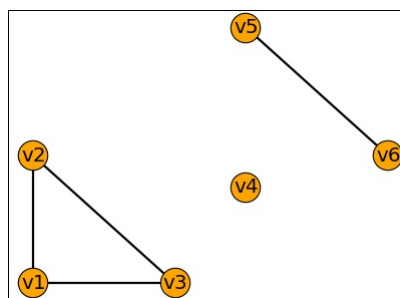


Figura 2.6: Grafos simples - construído pelo autor

## 2.2 Grau do vértice de um grafo

O grau  $d(v_i)$  (ou valência) de um vértice  $v_i$  em um grafo não direcionado é igual ao número de elos incidentes no vértice, quando houver um laço, deveremos contar duas vezes o valor do vértice.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo:

- Diz-se que um elo é incidente com o vértice  $v$ , se  $v$  for um vértice-extremidade de  $e$ . Nesse caso, diz-se também que  $v$  é incidente em  $e$ ;
- Dois elos incidentes no mesmo vértice são adjacentes (elos  $e_1$  e  $e_2$  na figura 2.5 são incidentes com mesmo vértice  $v_2$  e, conseqüentemente, são adjacentes );
- O grau de um vértice  $v$ , notado por  $d(v)$ , é o número de elos do grafo que são incidentes com  $v$ , contando cada laço duas vezes. Pois, corresponde ao número de vezes que  $v$  é vértice-extremidade de um elo. Um vértice de grau 0 é um vértice isolado, e um vértice de grau 1 é um vértice final;
- Um vértice de um grafo é par ou ímpar se o grau for par ou ímpar;
- A sequência de graus de um grafo consiste nos graus de seus vértices escritos em ordem crescente, com repetições se necessário. Para os grafos da figura 2.7, essas sequências são  $((1, 1, 2, 2, 2)(\text{grafo I}))$ ;  $((1, 1, 2, 2, 2)(\text{grafo II}))$ ; e  $((1, 2, 3, 4, 8)(\text{grafo III}))$ .

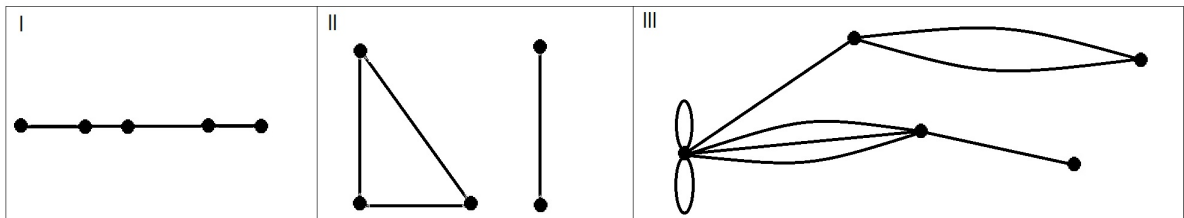


Figura 2.7: Grau do vértice - [7]

Os grafos em *I* e *II* têm dois vértices finais e três vértices de graus 2. O grafo em *III* tem um vértice final, um de grau 2, um de grau 3, um de grau 4 e um de grau 8.

Observando a Figura 2.8 logo abaixo podemos constatar:

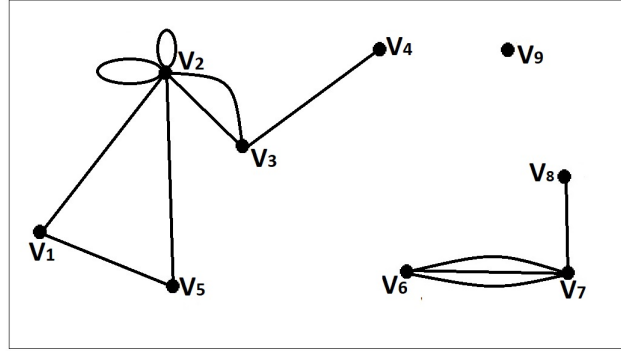


Figura 2.8: Grafo com 9 vértices e 12 elos - [7]

- vértices  $v_1$  e  $v_2$  são adjacentes;
- vértices  $v_1$  e  $v_3$  não são adjacentes;
- elos  $(v_1, v_2)$  e  $(v_2, v_3)$  são adjacentes;
- elos  $(v_1, v_2)$  e  $(v_3, v_4)$  não são adjacentes;
- vértices  $v_3$  e  $v_4$  são incidentes com o mesmo elo  $(v_3, v_4)$ , e nenhum outro vértice é incidente com esse elo;
- os graus dos vários vértices são:  $d(v_1)=2$ ;  $d(v_2)=8$ ;  $d(v_3)=3$ ;  $d(v_4)=1$ ;  $d(v_5)=2$ ;  $d(v_6)=3$ ;  $d(v_7)=4$ ;  $d(v_8)=1$  e  $d(v_9)=0$ .

Consideremos agora o grafo com cinco vértices e oito elos conforme a figura 2.9 . Para esse grafo, tem-se  $d(v_1)=3$ ;  $d(v_2)=4$ ;  $d(v_3)=4$ ;  $d(v_4)=3$ ,  $d(v_5)=2$ . Observe que  $d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)+d(v_4)+d(v_5) = 3+4+4+3+2 = 16 = 2 \cdot 8$  que é justamente duas vezes o número de elos do grafo. Esse resultado não é coincidência e é estabelecido pelo teorema a seguir:

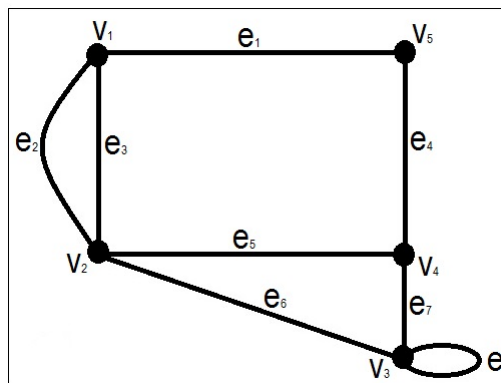


Figura 2.9: Soma dos graus do vértice - [7]

**Teorema 2.1** Para um grafo  $G = (V, E)$ , tal que  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_i\}$  ( $|V| = i$ ) e  $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_j\}$  ( $|E| = j$ ), tem-se:



$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2j \quad (2.1)$$

Teorema 2.2 Em um  $G = (V, E)$ , tal que:  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_i\}$  e  $E = \{e_1, v_2, e_3, \dots, e_j\} = j$  o número de vértices ímpares é sempre par.

Prova: Seja  $V$  o conjunto total dos vértices de um grafo  $G$ , que pode ser escrito como  $V = P \cup I$ , tal que  $P$  é o conjunto dos vértices pares e  $I$ , o conjunto dos vértices ímpares. Como no resultado estabelecido pelo teorema 2.1, podemos escrever:

$$2j = \sum_{v \in V} d(v_i) = \sum_{u \in P} d(v_u) + \sum_{w \in I} d(v_w) \quad (2.2)$$

Assim:

$$\sum_{w \in I} d(v_w) = 2j - \sum_{u \in P} d(v_u) \quad (2.3)$$

Podemos observar que a diferença acima é um número par, uma vez que é a diferença de dois números pares. Como cada um dos termos na soma

$$\sum_{w \in I} d(v_w)$$

é ímpar ( uma vez que cada um deles é o grau de um vértice ímpar) e como essa soma é par, deve existir um número par desses termos ( uma vez que a soma de um número ímpar com um número ímpar é sempre ímpar) ♦.

## 2.3 Aplicações

Vamos citar uma situação em que você é convidado para uma festa infantil, recebe o convite e junto está um mapa com uma das rota de acesso ao local da festa mostrado na figura 2.10

Observamos na figura 2.10 que o mapa é impreciso, porém todos os convidados que o receberam, chegaram a casa nova para a comemoração do aniversário.

Imaginemos agora que você seja um taxista e um cliente lhe desse um endereço que você não conhecesse, nesse momento você precisaria de um GPS e que a rota estivesse de forma precisa inclusive com as indicações de mão e contramão nas ruas



Figura 2.10: Fonte: <https://aniversariovoizaura.wordpress.com/>

além das placas de sinalização, conforme Figura 2.11.



Figura 2.11: Fonte: [http://s2.glbimg.com/iyEQ51L0ZsPHILugOJzL605c2c=/s.glbimg.com/jo/g1/f/original/2014/03/14/mudanca\\_barra.jpg](http://s2.glbimg.com/iyEQ51L0ZsPHILugOJzL605c2c=/s.glbimg.com/jo/g1/f/original/2014/03/14/mudanca_barra.jpg)

Agora pensemos em um carpinteiro que irá colocar uma parte de um móvel em uma estante. Ele deverá construir esse móvel com medidas precisas para que caiba no espaço destinado: se a medição for errada, não vai caber por ser grande demais ou ficar folgado, se for pequeno demais. Então o ideal é que esse móvel seja construído com as medidas certas.

Mas qual é a largura da estante? podemos medi-la apenas olhando para ela e dizer que é mais ou menos 80 cm, claro que não.

Um instrumento bastante utilizado para resolver essa situação é uma trena para fazer a medição e em seguida constatar que são exatamente 77,6 cm o espaço para colocar o móvel na estante.

O carpinteiro usou uma medida de comprimento, a trena, que tem graduações em centímetros e em milímetros: a trena irá nos possibilitar uma simplificação da realidade que é a medida real, ou largura real da estante. Porém com o espaço medido dessa forma não nos importa se no lugar da estante tivéssemos um motor de um carro, por exemplo. Com o instrumento que foi medido o espaço na estante que foi a trena, não iríamos obter uma medida tão precisa, e para medir meio litro de suco ou um mililitro de um medicamento injetável. O problema, continuaria a

ser o mesmo e nesse caso estaríamos trabalhando com uma simplificação da realidade. [6]

Em grande parte de nossas atividades, estaremos trabalhando com modelos, sem percebermos. Em contrapartida, todas as ciências trabalham com modelos.

Um mapa rodoviário, como podemos ver na figura 2.12 é um modelo de uma região que, dependendo de nosso percurso, iremos precisar de algumas informações que ela apresenta e que, sem dúvida, alguma é uma simplificação da realidade que é a região verdadeira.

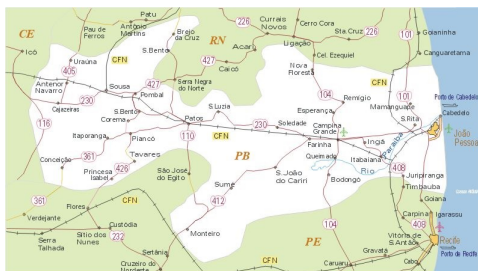


Figura 2.12: Fonte: <http://www.mapas-brasil.com/imagens/paraiba.jpg>

O mapa nos mostra diversas cidades das quais temos a área urbana abrangendo a vizinhança de outra, além de diversas rodovias e quais são as mais importantes.

Imaginemos agora que a nossa atribuição seja de um guia turístico e para isso é importante que saibamos as distâncias entre as interseções das estradas, o que vai nos permitir calcular se devemos percorrer de um determinado local a outro, ou seja, diretamente ou passando entre diversas cidades. Teremos dados sobre estas, preço de hotéis, informações de compras, espetáculos, etc, que irão nos permitir fazer uma análise financeira antes, para saber o quanto iremos gastar. E assim construir o modelo de viagem ideal.

Até o presente momento apresentamos modelos que procuravam reproduzir relações espaciais - esquema, plantas, mapas.

Os modelos podem também representar outros tipos de relação. Um professor de matemática pode construir um modelo do relacionamento entre seus alunos apenas pedindo para que cada colega indique o mais próximo em termos de amizade. Depois o professor escreve o nome no quadro branco e coloca setas de um amigo para o outro, indicando o que tem mais amizade. A esse modelo chamamos de sociograma. Observe a Figura 2.13

Podemos ver um modelo de sociograma na Figura 2.13, que possivelmente temos uma aluna novata (Jainara), justamente pelas conexões existentes, além de verificarmos que Maria Eduarda e Eliseu são mais sociáveis. Já Vitória só se relaciona com Eliseu. E a partir desse modelo podemos analisar diversas situações nas quais o grupo está envolvido.

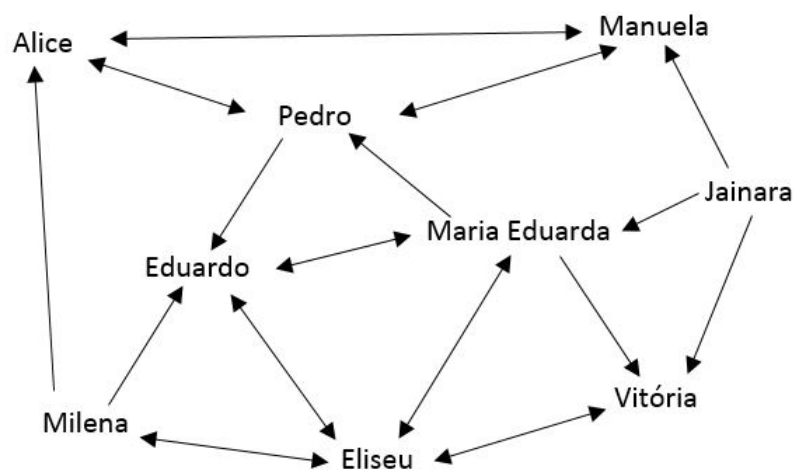


Figura 2.13: Conexão entre pessoas - construído pelo autor

Logo, podemos ter modelos que não envolvam valores numéricos como o exemplo da figura 2.13, e outros que tenham apenas relações numéricas, quando usamos uma malha rodoviária por exemplo. Nesses dois exemplos apresentados tratamos de modelos que nos mostram um certo tipo de organização, um deles indicados por pontos (cidade, pessoas) e o outro por ligações (estradas, ou ligação afetiva). Para os pontos temos o envolvimento de muitos valores numéricos, enquanto que no outro exemplo, o que nos interessou foi quais elementos estavam envolvidos e se tinham conexão ou não.

# Capítulo 3

## Grafos Planares

### 3.1 Definições

Uma das principais relações que podemos associar aos grafos planares está relacionada com a cartografia, que com o passar do tempo originou a necessidade de um estudo específico para as combinações de cores para diversificar as regiões descritas nos mapas. A associação de grafos planares deixou de ser uma exclusividade para o estudo específico dessa área e passou a abranger outros estudos nos quais a aplicação do estudo de grafos planares se faz necessário e de suma importância para o perfeito funcionamento. Estamos falando dos circuitos elétricos *VLSI* (Very Large Scale Integration), que em livre tradução temos: integração em escala muito grande. Porém, não iremos realizar um trabalho em específico sobre o *VLSI*, utilizamos apenas como um exemplo para abordar o assunto de grafos planares apresentado aqui.

**As definições e os teoremas apresentados nesta seção, foram elaboradas a partir das seguintes referências bibliográficas: [5],[7], [6].**

**Def 3.1** Um grafo é planar se seu esquema puder ser traçado em um plano de modo que dois elos quaisquer se toquem, no máximo, em alguma extremidade.

De acordo com a definição acima, o estudo dos grafos planares não precisa ser estudado com uma orientação, ou seja, um grafo orientado.

Observem a Figura 3.1, ela mostra a representação de um grafo com 4 vértices em sua forma planar.

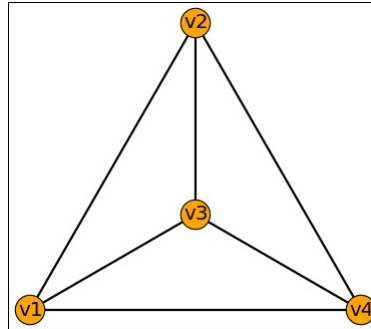


Figura 3.1: Grafo planar - construída pelo autor

Porém um grafo, pode não representar uma forma planar conforme podemos ver na Figura 3.2.

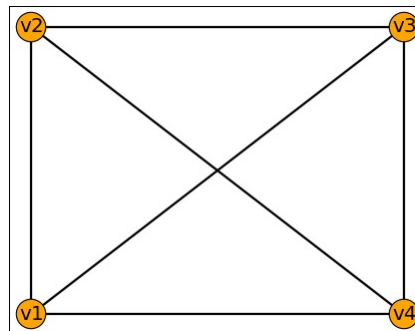


Figura 3.2: Grafo não planar - construída pelo autor

Mesmo a Figura 3.2 não apresentando ser um grafo planar, em termos gerais podemos considerar que um grafo com 4 vértices é planar conhecida a sua forma topológica, ou seja, um grafo que seja desenhado com cruzamento pode ser um grafo planar, desde que seja possível redesenhá-lo sem cruzamento. A figura 3.2, da forma que está construída, não parece um grafo planar; porém, depois de redesenha-lo, conforme a figura 3.1, sem o cruzamento dos elos, podemos dizer que um grafo com 4 vértices é planar [3].

## 3.2 Fórmula de Euler

De acordo com [7] **Def 3.2:** Um grafo planar  $G$  particiona o plano em um número de regiões chamadas faces de  $G$ . Mais precisamente, se  $x$  é um ponto do plano que não está em  $G$ , isto é, não é vértice de  $G$  ou um ponto sobre qualquer elo de  $G$ , então a face de  $G$  contendo  $x$  é definida como o conjunto de todos os pontos do plano que podem ser acessados a partir de  $x$ , por meio de uma linha (reta ou

curva) que não cruza qualquer uma dos elos de  $G$  ou passa por qualquer vértice de  $G$ .

Observemos a Figura 3.3 que tem quatro faces, e vamos identificá-las como  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$ , podemos ver que a face  $f_4$  não é limitada, geralmente é chamada de face exterior a  $G$ , enquanto as demais faces estão limitadas pelos vértices e chamada de face interior.

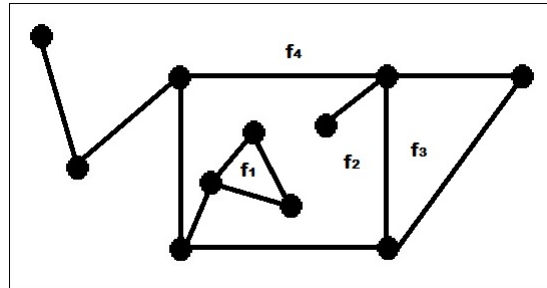


Figura 3.3: Grafo plano de 4 faces

Logo, qualquer qualquer grafo plano tem uma face exterior. Para qualquer outra face desse grafo, ela será limitada por um caminho fechado e chamada de face interior. O número de faces de um grafo plano  $G$  pode ser denotado por  $f(G)$  ou apenas por  $f$  (denotado no exemplo da figura 3.3)

Vamos observar agora mais um exemplo para os grafos  $G_1, G_2$  e  $G_3$ .

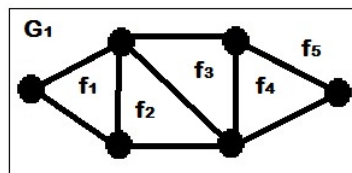


Figura 3.4: Grafo plano de 5 faces

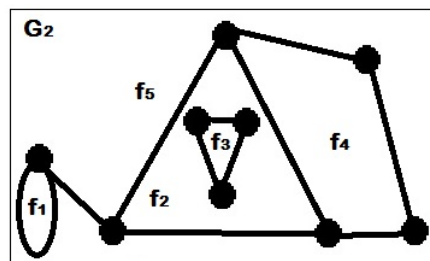


Figura 3.5: Grafo plano de 5 faces

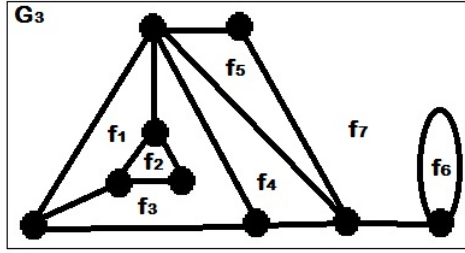


Figura 3.6: Grafo plano de 7 faces

Podemos facilmente identificar, respectivamente, que  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  tem 5, 5, e 7 faces.

**Teorema 3.1 - Fórmula de Euler** Seja  $G$  um grafo conectado plano e seja:

- $n$  - o número de vértice de  $G$ ,
- $e$  - o número de elos de  $G$ ,
- $f$  - o número de faces de  $G$ .

Então:

$$n - e + f = 2.$$

Tomemos como exemplo a Figura 3.3, que tem 11 vértices, 13 elos e 4 faces,  $n - e + f = 2$ , sendo esse um grafo conectado. Agora tomemos como exemplo a Figura 3.5, que tem 9 vértices, 11 elos e 5 faces. Como esse grafo não é conectado, a fórmula de Euler não é válida. Já na Figura 3.6 podemos ver que existem duas conexões que conectam o grafo central ao maior, possibilitando assim a fórmula de Euler.

**Corolário 1 do teorema 3.1** Seja  $G$  um grafo plano com  $n$  vértices,  $e$  elos,  $f$  faces e  $k$  componentes conectadas, então:

$$n - e + f = k + 1$$

**Corolário 2 do teorema 3.1** Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos planos que são ambos, diferentes desenhos do mesmo grafo planar  $G$ . Então  $f(G_1) = f(G_2)$ , ou seja,  $G_1$  e  $G_2$  tem o mesmo número de faces.

Vamos observar o exemplo da Figura 3.7 que é isomorfo (topologicamente igual) aos grafos  $G_1$  e  $G_2$  e, portanto, como mencionado antes,  $G$  mesmo tendo elos cruzados é um grafo planar. Como podemos verificar na Figura 3.7  $f(G_1) = f(G_2)$ .

**Def 3.2** Seja  $\varphi$  a face de um grafo plano  $G$ . O grau da face de  $\varphi$ , denotado por  $d(\varphi)$ , é o número de elos da fronteira de  $\varphi$ .



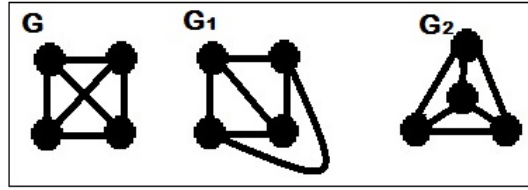


Figura 3.7: Grafos planos isomorfos

Podemos observar que  $d(\varphi) \geq 3$  para qualquer face interior  $\varphi$  de um grafo planar simples.

**Teorema 3.2** Seja  $G$  um grafo planar simples com  $e$  elos e  $n$  vértices, em que  $n \geq 3$ , então  $e \leq 3n - 6$ .

Para o teorema 3.2 é necessário e suficiente considerar que estamos falando de grafos conectados, caso contrário, pode-se acrescentar elos: note que a adição de elos de forma que venha a deixar o grafo conectado, não irá interferir no resultado, dado que a desigualdade é  $e \leq 3n - 6$ .

**Corolário 1 do teorema 3.2** Se  $G = (V, E)$  é um grafo simples planar, então  $G$  tem um vertice  $v$  de grau menor que 6, isto é,  $\exists v \in V$  com  $d(v) \leq 5$ .

### 3.3 Aplicação de grafos planares em circuitos elétricos

Ao compreendermos a ligação dos elementos de um circuito, podemos definir de forma simplificada algumas de suas propriedades relacionadas como topologia e a geometria do circuito. E essas propriedades são independentes do tipo de elementos usados.

Segundo [2] Um grafo ligado (connected graph) é aquele em que existe ao menos um caminho entre quaisquer dois dos seus nós. Se tal não se verifica, tem-se um grafo desconexo (disconnected graph).

#### Grafo: ramo (malha) e nó

A construção é realizada apenas por linhas, ao invés dos elementos de símbolos elétricos, seus respectivos pontos de conexão são conhecidos como nós (nodes), constituído um grafo (graph) do circuito. Com esta representação simplificada, podemos facilmente identificar a sua topologia, facilitando assim o entendimento sistemático do circuito.

## Circuito/Grafo planar

Iremos nos restringir aos circuitos onde todos os ramos ou malhas são representados em um plano, ou seja, um circuito planar ou sem cruzamentos em sua malha. Podemos observar na figura 3.8 abaixo, um circuito planar (a), e em seguida o seu respectivo grafo (b). Na mesma figura 3.8 temos um circuito não planar, pois nesse circuito temos um cruzamento de ramos em sua malha, observamos a resistência  $R$ , colocada entre os nós  $n1$  e  $n6$  na figura 3.8 (c), não está no mesmo plano que os demais elementos do circuito. Se estivesse, estaria colocada entre os nós  $n1$  e  $n2$ , que por sua vez estaria coincidente com o nó  $n6$ , isto é, o circuito só teria 5 nós.

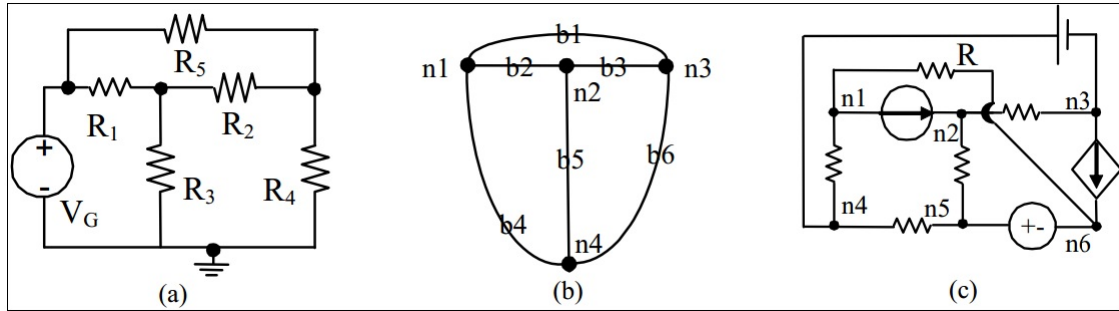


Figura 3.8: Circuito planar/não planar [2]

Podemos relacionar os elementos do circuito da figura 3.8 (a) com a mesma figura 3.8 em (b), que representa o grafo desse circuito:  $V_G \leftrightarrow b4$ ;  $R1 \leftrightarrow b2$ ;  $R2 \leftrightarrow b3$ ;  $R3 \leftrightarrow b5$ ;  $R4 \leftrightarrow b6$ ;  $eR5 \leftrightarrow b1$ .

## Malha de um circuito

Designamos por malha um conjunto de ramos de um grafo que formam um caminho fechado (closed path). No grafo do circuito da figura 3.8 (b) podemos definir algumas malhas compostas pelos ramos:  $b1$ ,  $b4$  e  $b6$ ; pelos  $b1$ ,  $b2$  e  $b3$ ; pelos  $b3$ ,  $b5$  e  $b6$ ; pelos  $b2$ ,  $b3$ ,  $b6$  e  $b4$ ;  $b1$ ,  $b2$ ,  $b5$  e  $b6$ .

## Árvore e galho de um circuito

Uma árvore (tree) de um dado grafo é um conjunto de ramos desse grafo que interligam todos os nós sem criar malhas. No grafo de um circuito, que é único, podem-se definir várias árvores. Na figura 2a e 2b, apresentam-se duas possíveis árvores do grafo da figura 3.8 (b). Na figura 3.9 eliminou-se os ramos  $b3$ ,  $b4$  e  $b6$ , e na figura 2b, os  $b1$ ,  $b5$  e  $b6$ .

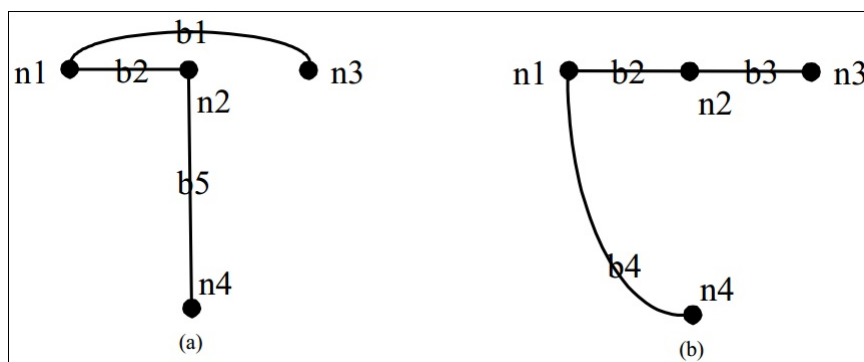


Figura 3.9: Árvore do grafo [2]

# Capítulo 4

## Probabilidade e Percolação

### 4.1 Modelo probabilístico

Para a compreensão do que vem a ser um modelo probabilístico faz-se necessário o entendimento do que vem a ser um experimento aleatório. Tal experimento é a realização de uma situação física que pode ser repetida nas mesmas condições quantas vezes quisermos.

**Def 4.1** Para cada experimento  $\varepsilon$  do tipo que estamos considerando, definiremos o espaço amostral como o conjunto de todos os resultados possíveis de tal experimento aleatório denotado por  $\Omega$ , supomos que  $\Omega$  é enumerável. E iremos representar um subconjunto  $A \subset \Omega$  como um evento.

Vejam, ao lançarmos um dado nós não podemos prever qual o número que irá ocorrer. Da igual forma, quando lançamos uma moeda não podemos prever se ocorrerá cara ou coroa. Experimentos desse tipo são aleatórios.

Vejam os seguintes exemplos:

Lançando dois dados iguais e não viciados ( ou seja, com probabilidades iguais de obtermos umas das seis faces voltadas para cima), queremos verificar qual é a chance de obtermos um número par em cada dado. vamos observar de forma sucinta todas as possibilidades de resultados dos dois dados na figura 4.1 logo abaixo:

<div>Dado 2</div> <div>Dado 1</div>						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,4)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Figura 4.1: Tabela dois dados - construída pelo autor

logo, o nosso  $\Omega$  será:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

No total temos 36 resultados possíveis.

Agora devemos escolher, dentre todas essas possibilidades, os eventos ou evento que estamos procurando. Vamos analisar a probabilidade de obtermos no lançamento desses dois dados uma soma que cujo resultado seja 8 (oito).

Observando a figura, destacamos todas as possibilidades cujo o resultado satisfaz a proposta do exemplo que é obtermos uma soma 8(oito) no lançamento desses dois dados.

Dado 1 \ Dado 2						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	<b>(2,6)</b>
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	<b>(3,5)</b>	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	<b>(4,4)</b>	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	<b>(5,3)</b>	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	<b>(6,2)</b>	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Figura 4.2: Lançando 2 dados e vendo todas as possibilidades do resultado ser 8 - construída pelo autor

Definido os eventos que precisamos analisar temos:

$$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

Para calcular a probabilidade temos:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Em nosso evento, temos a seguinte probabilidade:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{5}{36} \approx 0,1388 \dots$$

**Def. 4.2** [8]

O complementar de um evento  $A$  é o evento que ocorre se  $A$  não ocorrer, e escrevemos assim a notação:  $A^c$  é o evento complementar do evento  $A$

**Def. 4.3** [8] Seja  $\mathcal{F}$  uma classe de subconjuntos de  $\Omega$  será  $P$  se e somente se:

1.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ ;
2. Se  $A_n \in \mathcal{F}$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , temos  $\bigcup_{i=1}^n A_n \in \mathcal{F}$ .

Para o caso em que o espaço amostral é enumerável, podemos escrever  $\Omega$  como  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ , então  $A \in \mathcal{F}$ , logo:

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p(\omega_i)$$

**Def. 4.4** [8] (Definição axiomática) Uma probabilidade é uma função  $P$  a valores reais definida em uma classe  $\mathcal{F}$  de eventos de um espaço amostral  $\Omega$ , que satisfaz as seguintes condições:

1.  $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$ .
2.  $P(\Omega) = 1$ .
3. Aditividade enumerável: para qualquer sequência  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  e dois eventos dois a dois disjuntos, ou seja, não tem elementos em comum.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

A tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é chamado um espaço de probabilidade.

**Def. 4.5** [8] Seja  $A$  e  $B$  eventos de  $\Omega$ , espaço amostral.  $A$  e  $B$  são ditos independentes se e somente se:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Def. 4.6** [8] Uma variável aleatória  $X$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é uma função a valores reais definida em  $\Omega$ , tal que

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

, para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Def. 4.7** [8]  $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$  significa que  $\{X \leq x\}$  é um evento aleatório. Quando os valores de  $X$  forem finitos ou infinitos enumeráveis, podemos dizer que  $X$  é uma variável aleatória discreta. Porém, se  $X$  assumir valores em um intervalo

de números reais,  $X$  será uma variável aleatória contínua.

**Def. 4.8** [8] Um vetor  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , onde cada  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ , é uma variável aleatória, é chamado vetor aleatório. Em particular, se cada  $X_i$  é discreta, temos um vetor aleatório discreto.

**Def. 4.9** [8] As variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são independentes se, para qualquer conjunto  $A_i \subset \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ .

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

**Def. 4.10** [8] (Distribuição Binomial). Vamos supor que um experimento composto de  $n$  repetições independentes, onde há somente dois resultados possíveis: aberto e fechado, com probabilidades  $p$  para aberto e  $1 - p$  para fechado. Seja  $X$  o número de sucesso nas  $n$  repetições. A variável aleatória  $X$  terá distribuição Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ . ( $X \sim \text{binomial}(n, p)$ ).

**Teorema 4.1** [8] Seja  $X$  uma variável aleatória tal que  $X \sim \text{binomial}(n, p)$ . Sua função de probabilidade será:

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n.$$

O estudo da distribuição binomial está relacionado diretamente com o nosso objeto de pesquisa, pois levaremos em conta o comportamento de um determinado evento em um espaço no qual chamaremos de malha e analisar as probabilidades desse evento ocorrer em determinadas direções.

**Teorema 4.2** [8] Seja  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  uma partição do espaço amostral  $\Omega$  em eventos de probabilidade positiva, isto é, esses eventos são dois a dois disjuntos,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n B_i$  e  $P(B_i) > 0$  para todo  $A_i$ . Então, para qualquer evento  $A$ :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i)$$

## 4.2 A percolação

O intuito dessa seção é introduzir com formalismo matemático a noção de percolação e ao ver as demonstrações dos resultados perceber que tipo de raciocínio é requerido na prova dos resultados.

Ao pesquisarmos sobre o que é percolação ou como esse processo ocorre, nos deparamos com Broadbent e Hammersley [1] que, propuseram o seguinte modelo para o modo pelo qual o líquido se infiltra através do solo, ou gás através de uma máscara de gás. Um aglomerado de solo é modelado por uma rede quadrada bidimensional, de modo que cada um dos locais da rede é conectado aos seus quatro vizinhos mais imediatos por ligações, que podem, se não forem bloqueados permitir a passagem de líquido. Essa experiência foi realizada no século XX, exatamente no ano de 1957. Com isso, podemos definir que a percolação nada mais representa que uma simples filtração; é a passagem de um material fluido através de um sistema sólido disperso.

Observamos algumas definições e conceitos importantes sobre o estudo de percolação relacionado aos grafos analisamos como uma das referências a dissertação de Élcio Lebensztary [10] que possui algumas definições e conceitos apropriados ao capítulo.

Seja  $G = (V, E)$ , um grafo infinito e conectado. Para a percolação de elos, cada elo do grafo  $G$  está ligado aleatoriamente, compondo uma conexão aberta ou fechada independente dos demais elos. Quando nos relacionamos aos vértices de um grafo  $G$ , no que consiste em está aberto (ocupado) ou fechado (vazio) no estudo de percolação, chamamos esse como modelo de sítios. Em ambos os modelos esses eventos acontecem de formas independentes, porém, no nosso objeto de estudo e pesquisa introduzimos uma dependência nos eventos.

A relação de independência que ocorre entre os modelos sejam eles de elos ou sítios, originam a família de variáveis aleatórias independente de seus dois valores. No estudo tradicional devemos levar em consideração o valor atribuído a cada vértice o valor 1 quando esse estiver aberto, com probabilidade  $p \in [0, 1]$ , e com valor 0 quando estiver fechado, com probabilidade  $q = 1 - p$ . Partindo desses eventos probabilísticos temos o modelo de percolação independente, de Bernoulli.

## 4.3 Representação de elos independentes

Para o estudo da representação desses elos, tomemos uma malha hipercúbica em  $d$  dimensões denotado por  $(Z^d, E^d)$ , onde  $E^d$  um aglomerado ou rede e seja esses um



conjunto de sítios vizinhos onde,  $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \mid \|x - y\| = 1\}$ .

Iremos atribuir a cada elo pertencente ao  $E^d$  o status de aberto ou fechado de forma que  $X := \{X_e, e \in E^d\}$ , como sendo uma distribuição de variáveis aleatórias independentes comum de *Bernoulli* com parâmetro  $p$ , isto é,

$$P_p(X_e = 1) = p, \quad P_p(X_e = 0) = 1 - p.$$

Teremos para todo  $e \in E^d$ , sendo  $p$  um número real que varia entre 0 e 1, pelo qual indicaremos que  $X_e = 1$  é um elo que está aberto, ou seja, com passagem de fluidos e para  $X_e = 0$  indicamos que o elo está fechado e não ocorre a passagem de fluidos. Denotaremos por  $P_p$  a probabilidade subjacente,  $P_{p,d}$ , a dimensão,  $E_p$  a esperança.

No artigo publicado por Fontes[4], um conjunto de elos de  $E^d$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ,  $n \geq 1$ , onde  $e_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , será dito um caminho se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se forem distintos e  $y_i = x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  (não contém circuitos).

Quando todos os caminhos estiverem abertos, dizemos que os seus elos estão abertos, isto é,  $X_{e_i} = 1$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Dois sítios estão conectados (notação:  $x \leftrightarrow y$ ) se existir um caminho aberto  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , com  $x_1 = x$  e  $y_n = y$ . Quando tivermos conjuntos de elos conectados entre si, chamaremos de aglomerados e denotaremos por  $C_x$  e apenas por  $C$  o aglomerado da origem. Um dos objetivos básicos segundo Fontes[4] para percolação é calcular o volume do aglomerado da origem denotado por  $|C|$ , mais precisamente, em sua distribuição (que, nota-se, é a mesma que a de  $|C_x|$ ) para todo o sítio  $x$ , devido à invariância por translações de  $P_p$ ). De forma resumida, Fontes procura saber se o aglomerado infinito ocorre com probabilidade positiva, se assim acontecer, dizemos então que o objeto em estudo pertence a  $Z^2$  que percola. Conforme dito anteriormente, as nossas observações estão sendo realizadas em  $Z^d$ , pois em 1 dimensão, tal estudo apresenta um problema trivial. Por que o problema é trivial? [4] Se denotarmos por  $C_-$  e  $C_+$  os sítios de  $C$  à esquerda e à direita da origem, respectivamente, temos que  $|C| = C_- + C_+ + 1$  e que  $|C_-|$  e  $|C_+|$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com  $P_p(|C_+| \geq k) = p^k$ . Logo, se  $p < 1$ ,  $P_p(|C_-| = \infty) = P_p(|C_+| = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_p(|C_+| \geq k) = 0$  e  $P_p(|C| = \infty) \leq P_p(|C_-| = \infty) + P_p(|C_+| = \infty) = 0$ .

Portanto, com probabilidade 1, não há aglomerados infinitos para dimensão 1, quando  $P < 1$ . É evidente que  $P_1(|C| = \infty) = 1$ . por esse resultado apresentado por Fontes em seu artigo, iremos realizar nosso estudo para  $d = 2$ .

Sabendo que  $|C|$  é uma variável aleatória discreta, pode assumir valores  $1, 2, 3, \dots, \infty$ . Ou seja, um valor interessante será.

$$\theta(p) := P_p(|C| = \infty)$$

Outra abordagem para o estudo da expressão, seria a partir de:

$$\theta(p) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_p(|C| = k)$$

Quando temos um valor pequeno para  $k$  fica fácil calcular  $P_p(|C| = k)$ , porém quando o valor de  $k$  é muito alto, torna-se complicado na forma de combinatória para realizar o cálculo e, até o presente momento, não temos uma forma explícita para um  $k$  genérico. Já para estudo de  $\theta(p)$ , teremos uma outra linha de raciocínio.

Um resultado importante para o estudo do modelo de percolação, é justamente aquele que comprova uma modificação de fases em duas ou mais dimensões.

**Teorema 4.3** Para  $d \geq 2$ , existe um valor crítico do parâmetro  $p$ , denominado  $p_c$ , no intervalo aberto  $(0, 1)$  tal que:

$$\theta(p) = 0, \text{ se } p < p_c,$$

$$\theta(p) > 0, \text{ se } p > p_c.$$

Agora mostraremos um modelo mais detalhado no qual podemos explorar as propriedades da geometria e de monotonicidade da função  $\theta(p)$  para isso utilizaremos o teorema 4.3 e iremos realizar pressupostos adicionais, e em nosso caso, utilizamos outro tipo de variáveis aleatórias, conforme descrito abaixo.

Seja  $Z := \{Z_e, e \in E^d\}$ , é uma família de variáveis aleatórias independentes distribuídas uniformemente em  $[0, 1]$ . Iremos denotar  $P$  como probabilidade implícita.

Segundo Fontes [4], um elo  $e$  da rede será dito  $p$ -aberto se  $Z_e < p$  e  $p$ -fechado, caso contrário. Logo, construiremos um modelo de percolação de elos, onde teremos elos  $p$ -abertos e  $p$ -fechados, seguindo os mesmos critérios para a percolação de sítios apresentada mais acima.

Denominaremos como  $C_p$  o aglomerado de sítios conectados por elos  $p$ -abertos que está na origem. Observando o modelo padrão apresentado acima, podemos concluir que a distribuição de probabilidade ocorre de igual forma ao modelo original  $C$ .

**Lema 4.1**  $\theta(p)$  é não-decrescente em  $p$ .

## Prova

Em termos do modo padrão, temos que  $\theta(p) = P(|C_p| = \infty)$ . Por outro lado,  $C_p \subset C_{p'}$  quando  $p < p'$ , o que é consequência de um elo  $p$ -aberto ser necessariamente  $p'$ -aberto. Concluimos que.

$$\theta(p) = P(|C_p| = \infty) \leq P(|C_{p'}| = \infty) = \theta(p').$$

A mesma representação que  $p$  assume de acordo com o lema 4.1, nos garante definir um valor critico, que é representado da seguinte forma:

$$P_c = \sup\{p : \theta(p) = 0\}.$$

**Lema 4.2:**  $\theta(p, d)$  é não-decrescente em  $d$ .

Com o Lema 4.2 nós podemos construir outro modelo de percolação, sendo que em  $d$  dimensões numa rede  $d+1$ -dimensional, declarando que os elos estejam fechados do hiper-plano ao restante do espaço, e sendo  $X$  os demais elos. Chamando de  $\overline{C}$  o aglomerado da origem neste modelo, temos que  $\overline{C} \subset C$ , logo temos:

$$\theta(p) := \theta(p, d) = P_{p,d+1}(|\overline{C}| = \infty) \leq P_{p,d+1}(|C| = \infty) = \theta(p, d+1).$$

o que prova o lema 4.2

**Proposição 4.1**[4]: Para  $d \geq 2$  e  $p$  suficientemente próximo de 0, temos

$$\theta(p) = 0.$$

**Proposição 4.2**[4]: Para  $d = 2$  e  $p$  suficientemente próximo de 1, temos

$$\theta(p) > 0.$$

**Proposição 4.3**[9]: Para  $d = 2$

$$\inf_p\{\theta(p) > 0\} = p_c = \frac{1}{2}$$

Veremos a demonstração das proposições 4.1 e 4.2, conforme consta no artigo publicado por Fontes [4]. e os resultados abaixo são suficientes no primeiro tomemos  $p < 1/(2d-1)$  e no segundo  $p > 2/3$ .

## Prova da Proposição 4.1

É suficiente mostrar que  $X_p := E_p|C| < \infty$  para o próximo  $p$  de 0, pois se  $\theta(p) = P_p(|C| = \infty) > 0$ , então, claramente,  $X_p = \infty$ . Podemos escrever.

$$|C| = \sum_{x \in Z^d} I_{\{0 \leftrightarrow x\}} \quad (4.1)$$

onde  $I_A$  é a função indicadora do evento  $A$ , isto é,

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ ocorrer,} \\ 0, & \text{se } A \text{ no ocorrer.} \end{cases} \quad (4.2)$$

e logo

$$X_p = \sum_{x \in Z^d} P_p(0 \leftrightarrow x). \quad (4.3)$$

Podemos reordenar a soma acima da seguinte forma

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{|\gamma|=n} P_p(\gamma \text{ está aberto}),$$

onde a segunda soma é sobre os caminhos  $\gamma$  partindo da origem e de comprimento  $n$  (isto é, caminhos  $\gamma = \{e_1, \dots, e_n\}$  em que  $x_1 = 0$ ). A probabilidade acima vale  $p^n$  independentemente de  $\gamma$ . logo

$$X_p = \sum_{n \geq 0} \sigma(n) p^n, \quad (4.4)$$

onde  $\sigma(n)$  simboliza o número de caminhos saindo da origem e de tamanho  $n$ .

Um argumento combinatório simples revela que, para  $n \geq 1$ ,

$$\sigma(n) \leq 2d(2d-1)^{n-1}$$

.

Realmente, temos  $2d$  possíveis sítios de destino no primeiro passo do caminho, enquanto que a partir do segundo até o final, cada passo tem no máximo  $2d-1$  possíveis sítios de destinos.

$$X_p \leq \sum_{n \geq 1} 2dp[(2d-1)p]^{n-1} + 1, \quad (4.5)$$

e para que a série seja convergente, basta tomarmos  $p < 1/(2d - 1) \cdot \Delta$

### Prova da Proposição 4.2[4]

O argumento tem sustentação matemática em propriedades geométricas de  $Z^2$ , no qual devemos considerar um rede bidimensional dual de  $Z^2$ ,

$$Z_*^2 = Z^2 + (1/2, 1/2)$$

$Z_*^2$  é um deslocamento de  $Z^2$  por  $1/2$  unidade em cada direção coordenada. Volumes finitos superpostos de  $Z^2$  e  $Z_*^2$  são ilustrados abaixo, o de  $Z^2$  em linhas cheias e linhas tracejadas para  $Z_*^2$ .

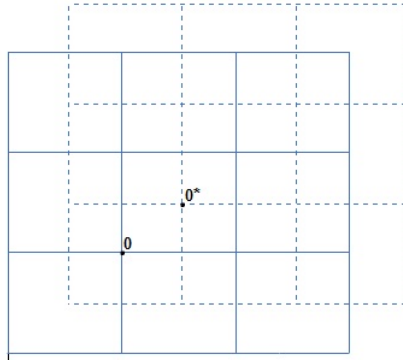


Figura 4.3: plano  $Z^2$  e  $Z_*^2$

Observemos que existe uma relação de 1 a 1 entre os sítios e elos de  $Z^2$  e aqueles de  $Z_*^2$ , que associa  $e$  em  $Z^2$  ao elo secante a  $e$ , denotamos  $e_*$ , em  $Z_*^2$ , como na figura a seguir

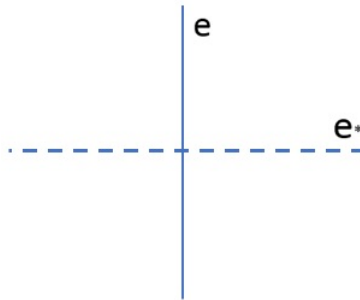


Figura 4.4: plano  $Z^2$  e  $Z_*^2$

A figura 4.9 pode ser encontrada em [4]. Logo, o nosso modelo de percolação está introduzido em  $Z_*^2$ , a partir de  $Z^2$  chamando  $e_*$  aberto ou fechado respectivamente.

Iremos definir como um modelo de percolação em  $Z^2_*$ , criado a partir de  $Z^2$ , determinado por  $e_*$  com elos abertos ou fechados de acordo com  $e$ .

Iremos determinar que um *circuito* é um caminho de elos conectados que se fecha por sobre si mesmo. Um aglomerado em  $Z^2$ , que está ligado à existência de um circuito fechado, ou seja, um circuito de elos fechados em uma rede dual, ao redor da origem.

A imagem apresentada na figura 4.5, ilustra um aglomerado[4].

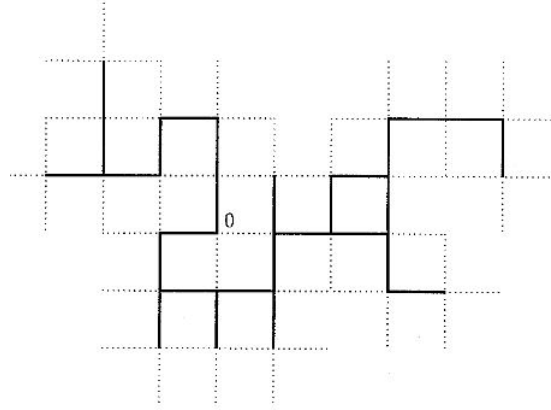


Figura 4.5: aglomerado de elos

Com  $p$  suficientemente próximo de 1, a probabilidade do aglomerado da origem é rigorosamente menor que 1.

$P_p$  (tem um circuito fechado na rede dual em torno da origem)  $\leq \sum_{\gamma} P_p$  ( $\gamma$  está fechado), sendo que a soma é sobre todos os circuitos de  $\gamma$  ao redor da origem, pode ser representada na forma:

$$\sum_{n \geq 4} \sum_{|\gamma|=n} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ está fechado}).$$

A segunda soma é sobre o circuito de  $\gamma$  ao redor da origem de comprimento  $n$ .

Logo, a probabilidade no interior das somas irá depender apenas de  $n$  e vale  $(1 - p)^n$ , nesse caso a soma sobre todos os circuitos pode ser representada como:

$$\sum_{n \geq 4} \lambda(n)(1 - p)^n$$

Nesse caso  $\lambda(n)$  determina o número de circuitos ao redor da origem em uma rede dual com comprimento  $n$ .

O argumento de que  $\lambda(n)$  denota o número de circuitos na rede dual ao redor da origem, produz uma cota superior para  $\lambda(n)$ . Qualquer circuito que acontecer na rede dual em torno da origem, teremos um elo cruzado da rede original, expresso na forma  $((0, k), (0, k+1))$ , para alguns  $-n/2 \leq k \leq n/2$ . Após termos esse elo secante, cada elo  $(n-1)$  subsequente pode ser colocado no máximo de três maneiras:

$$\lambda(n) \leq n3^{n-1}. \quad (4.6)$$

Substituindo na soma expressa logo acima, temos:

$$\sum_{n \geq 4} n/3 [3(1-p)]^n$$

,

Podemos observar que é uma função contínua, decrescente em  $p$  para  $p > 2/3$ , tendo valor nulo em  $p = 1$ . Logo, existe  $p_0 < 1$  tal que a expressão acima é rigorosamente menor que 1 para  $p > p_0$ .  $\triangle$

# Capítulo 5

## Modelo, Simulação e Resultados

### 5.1 Modelo

Em nosso trabalho iremos apresentar um novo modelo de percolação de elos para dois fluidos, os elos de  $Z^2$  serão percorridos em forma de espiral no sentido anti-horário, partindo da origem, e a cada elo verificam-se quais direções ainda não estão conectadas. Em seguida, faz-se um sorteio uniforme entre as direções vazias. Por fim, sorteia-se a realização de uma variável aleatória binomial de parâmetros  $n = 2$  e  $p$  com valores fixos (entre 0 e 1), se a variável aleatória for igual a 0, não iremos pintar o caminho percorrido, logo, seguiremos para o próximo elo, se a variável aleatória for 1 pintamos o elo de vermelho de tamanho 1 e se for 2 pintamos o elo de azul de tamanho 2. A representação desse comportamento dar-se-á no plano discreto, ou seja,  $Z^2$ .

Na figura 5.1 temos a representação do comportamento sequencial que os elos irão percorrer:

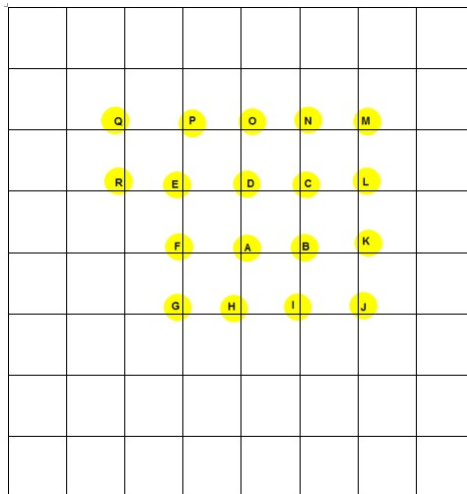


Figura 5.1: construída pelo autor - Malha inicial



Observem a Figura 5.2

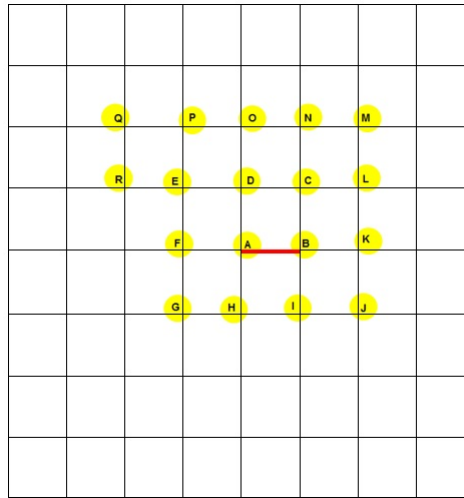


Figura 5.2: construída pelo autor - Simulação explicando a dinâmica do programa

- 1º sorteamos a direção. (Estamos no vértice A, pois é o centro);
  - Nesse exemplo foi para a direita;
- 2º Sorteamos a cor. (deu número 1);
  - O número 1 está associado a cor vermelho e tamanho 1;
- 3º preenche o elo de acordo com os sorteios realizados e com os critérios apresentados para a construção de um novo modelo de percolação.

para a próxima iteração do programa temos:

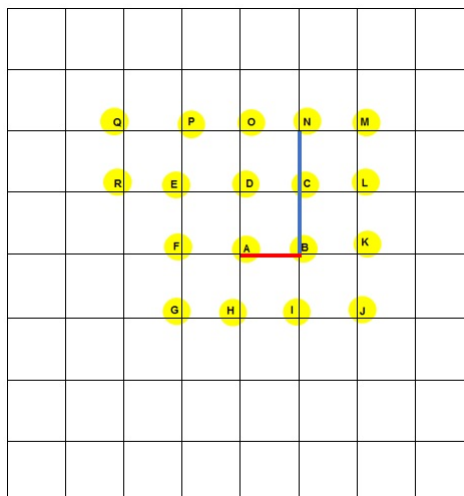


Figura 5.3: construída pelo autor - Simulação explicando a dinâmica do programa

- 1º sorteamos a direção. (Estamos no vértice B);
  - Nesse exemplo a direção foi para a cima;
- 2º Sorteamos a cor. (deu número 2);
  - O número 2 está associado a cor azul e tamanho 2;
- 3º preenche o elo de acordo com os sorteios realizados e com os critérios apresentados para a construção de um novo modelo de percolação.

Finalizamos a nossa simulação de demonstração com mais uma iteração do programa, exemplificando como os elos devem ser visitados e preenchidos.

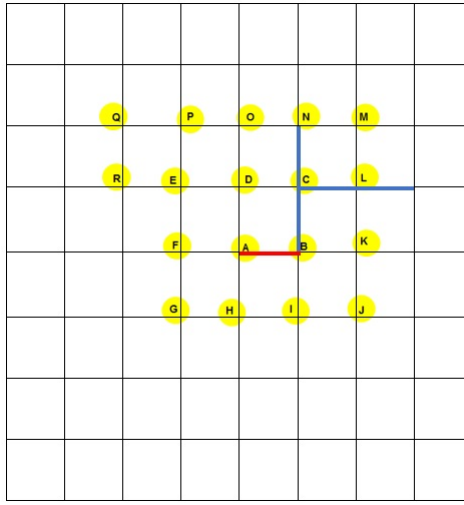


Figura 5.4: construída pelo autor - Simulação explicando a dinâmica do programa

- 1º sorteamos a direção. (Estamos no vértice C);
  - Nesse exemplo a direção foi para a esquerda;
- 2º Sorteamos a cor. (deu número 2);
  - O número 2 está associado a cor azul e tamanho 2;
- 3º preenche o elo de acordo com os sorteios realizados e com os critérios apresentados para a construção de um novo modelo de percolação.

## 5.2 Simulação de sistemas com dois possíveis níveis de percolação no $\mathbb{Z}^2$

Dado um número  $p \in [0, 1]$  definimos uma variável aleatória binomial de parâmetros 2 e  $p$  a qual denotamos por  $Y$ . Assim, temos:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } (1-p)^2 = t_0, \\ 1, & \text{com probabilidade } 2p(1-p) = t_1, \\ 2, & \text{com probabilidade } p^2 = t_2. \end{cases}$$

Para simularmos a variável  $Y$  sorteamos um número no intervalo  $[0, 1]$  utilizando um comando no python para gerar esse número uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , iremos denotar esse número por  $x$ . Teremos três casos possíveis:

- 1º caso temos  $0 \leq x < t_0$ . Então  $Y = 0$ ;
- 2º caso temos  $t_0 < x < t_0 + t_1$ . Então  $Y = 1$ ;
- 3º caso temos  $t_0 + t_1 < x < 1$ . Então  $Y = 2$ .

Vejamos o exemplo para  $p = 0,2$ , nos três casos nós teremos:

$$t_0 = (1 - 0,2)^2 = \frac{64}{100}$$

Observemos que para  $p = 0,2$ , teremos uma maior chance que não ocorra percolação em nosso modelo, pois os elos não pintados aparecerá mais vezes.

$$t_1 = 2 \cdot 0,2 \cdot (0,8) = \frac{32}{100}$$

Aqui teremos alguns elos pintados de vermelho.

$$t_2 = 0,04 = \frac{4}{100}$$

Aqui quase não teremos elos pintados de azul.

Observemos a figura 5.2 na qual ilustrando de forma aproximada a probabilidade para cada cor.

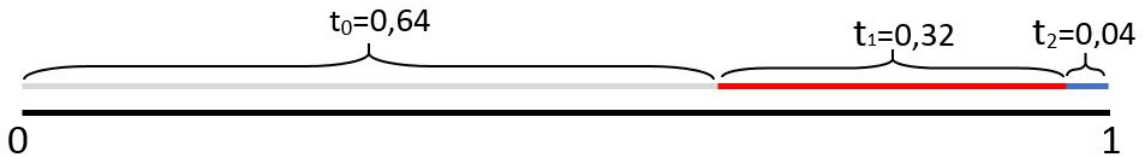


Figura 5.5: construída pelo autor

### 5.3 Exposição dos resultados obtidos computacionalmente

Os resultados de nossa pesquisa consistem em uma apresentação gráfica do comportamento dos dois fluidos para diferentes valores de  $p$ , onde  $p$  é um dos parâmetros

da binomial, definida na seção anterior.

Num primeiro momento, simulamos o comportamento dos fluidos para diferentes valores de  $p$  para uma grade específica. Essas grades são quadradas com possíveis lados: 9, 11, 15, 17 e 19. Então para um  $n$  (lado da grade fixo) simulamos 100 vezes a dinâmica do nosso modelo de percolação para diferentes valores de  $p = 0.1, \dots, 0.9$ .

Contamos para cada uma das 100 simulações a quantidade de casos que houve um caminho da origem até a fronteira. Num segundo momento, tentamos identificar o comportamento dessa quantidade de sucessos de caminhos até a fronteira, usando uma aproximação da forma:

$$f_n(p) = a_n p^{b_n}.$$

onde a função  $f_n(p)$  representa a quantidade de sucessos para uma grade de lado  $n$  fixa, onde  $a_n$  e  $b_n$  são constantes. Para estimar os valores de  $a_n$  e de  $b_n$  usando o método dos mínimos quadrados para

$$\log f_n(p) = \log a_n + b_n \log p.$$

Num terceiro momento, para valores fixos de  $p$ , fizemos o gráfico da quantidade de sucessos de 100 realizações mas, para diferentes tamanhos dos lados das grades

### 5.3.1 Imagens da Simulação

Nesta seção, estaremos apresentando a três imagens computacional da simulação realizada para os respectivos valores de  $p = 0.5, 0.7$  e  $0.9$ .

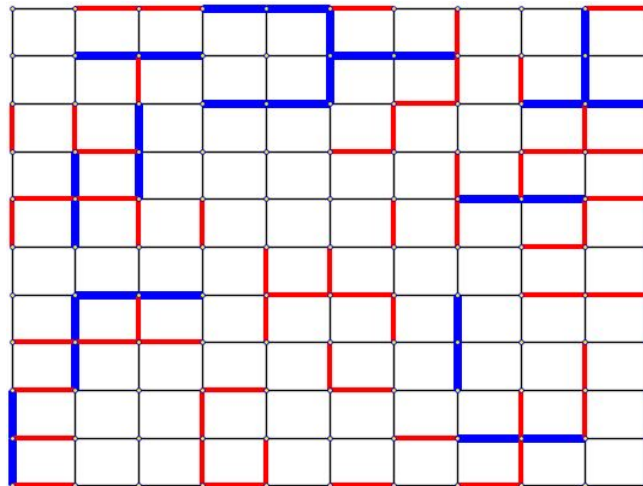


Figura 5.6: construída pelo autor - com probabilidade  $p=0.5$

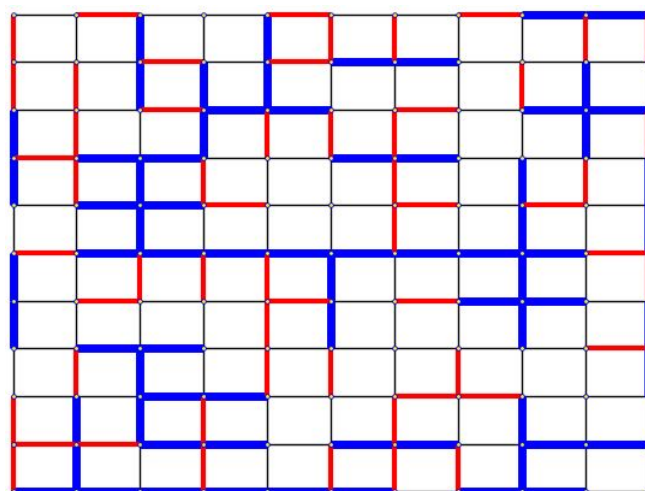


Figura 5.7: construída pelo autor - com probabilidade  $p=0.7$

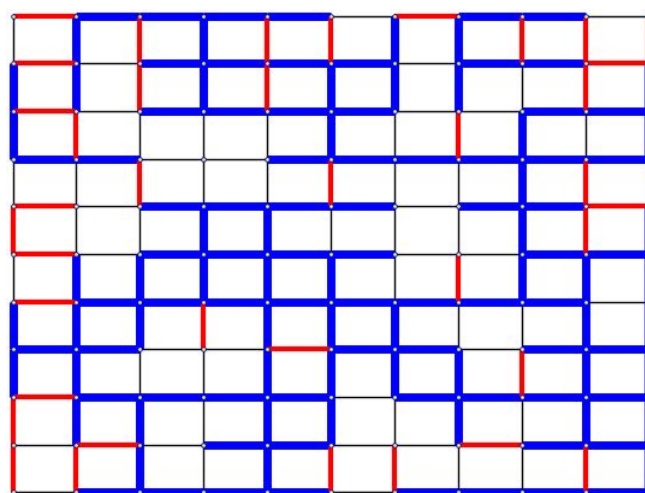


Figura 5.8: construída pelo autor - com probabilidade  $p=0.9$

### 5.3.2 Simulação do processo para " $n$ " fixo e variando " $p$ "

Nesse primeiro caso  $n = 9$ , simulamos 100 vezes para cada valor de  $p = 0.1, \dots, 0.9$ . Analisamos uma função crescente, de forma não linear, conforme podemos observar abaixo:

Simulação numa malha 9x9	
Probabilidade (p)	Percolou
0,1	0
0,2	0
0,3	1
0,4	4
0,5	9
0,6	31
0,7	42
0,8	70
0,9	94

Figura 5.9: construída pelo autor - Imagem da tabela construída no excel

Construção do gráfico de acordo com a figura 5.9

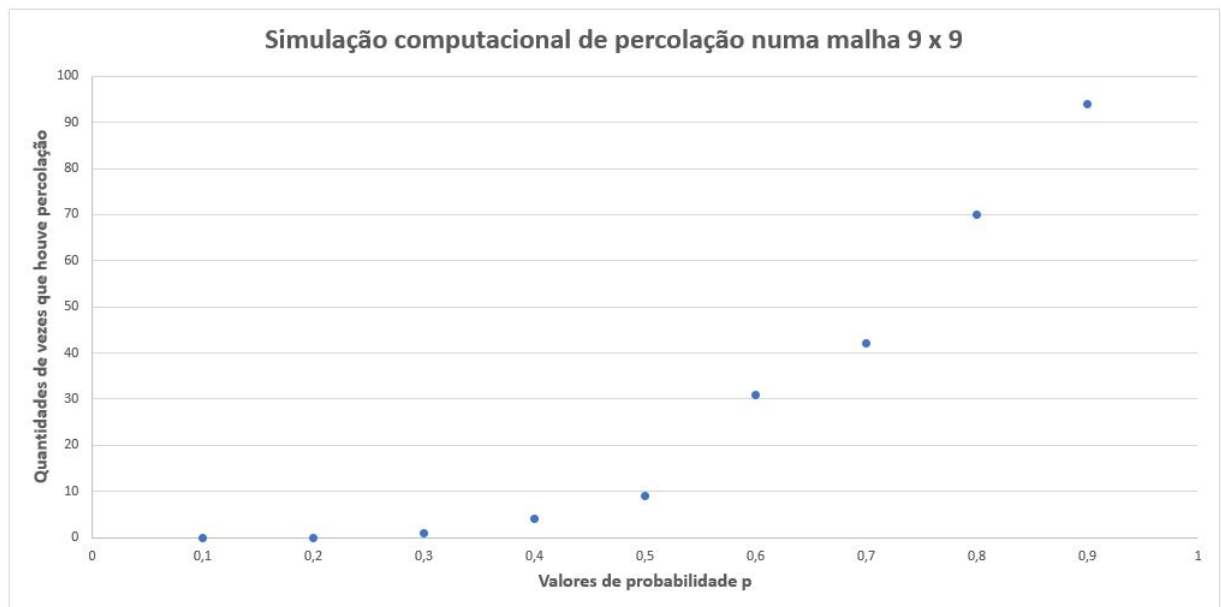


Figura 5.10: construída pelo autor - Imagem da tabela construída no excel

Aplicamos o logaritmo neperiano e o método dos mínimos quadrados aos resultados obtidos conforme podemos observar na figura 5.11, e logo abaixo podemos ver o resultado dessa aplicação na figura 5.12

Simulação numa malha 9x9	
Probabilidade (p)	Percolou
-2,302585093	#NÚM!
-1,609437912	#NÚM!
-1,203972804	0
-0,916290732	1,386294361
-0,693147181	2,197224577
-0,510825624	3,433987204
-0,356674944	3,737669618
-0,223143551	4,248495242
-0,105360516	4,543294782

Figura 5.11: construída pelo autor - Imagem da tabela construída no excel

Construção do gráfico de acordo com a figura 5.11

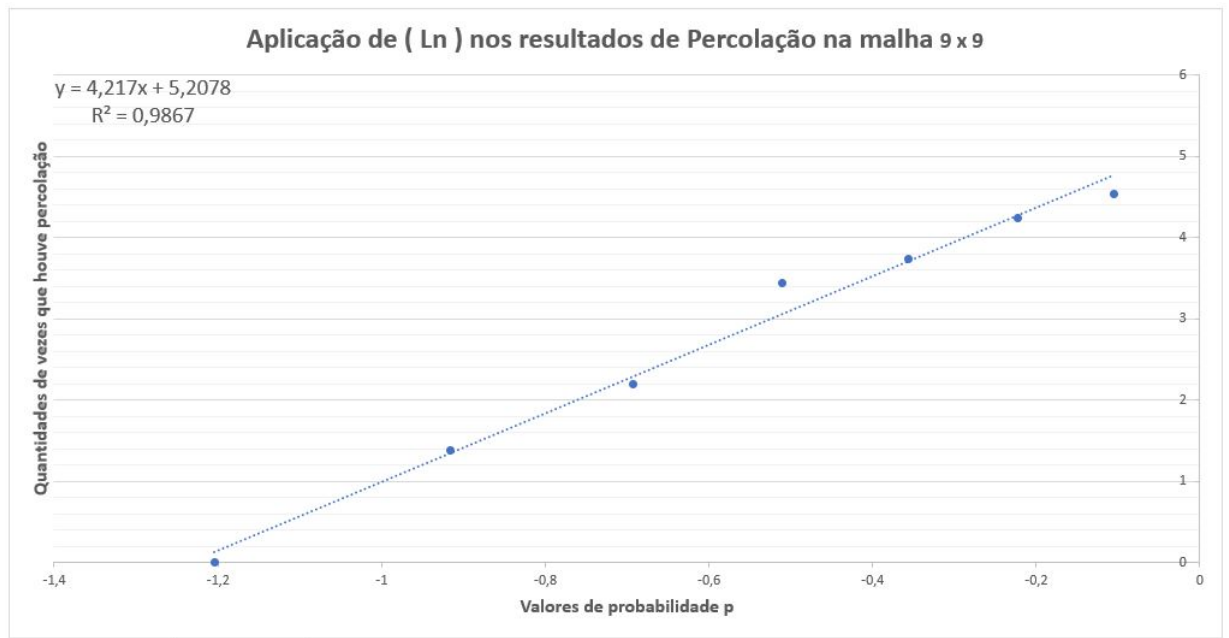


Figura 5.12: construída pelo autor - Imagem da tabela construída no excel

Em seguida, optamos por obter uma aproximação do tipo:

$$f_9(p) = a_9 p^{b_9}.$$

Por conseguinte, estimamos os valores de  $a_9$  e de  $b_9$ . Usaremos a aproximação anterior ao utilizar o método dos mínimos quadrados para:

$$\log f_9(p) = \log a_9 + b_9 \log p.$$

Os valores estimados foram  $a_9 = 182,69$  e  $b_9 = 4,217$ . Uma observação para o valor do  $R_9^2$  que nos diz a quão boa foi aproximação pois, quanto mais próximo ao número 1 melhor, para encontrarmos os resultados, usamos o método dos mínimos quadrados. Neste caso, nos tivemos  $R_9^2 = 0,9867$ . Na sequência, nós calculamos os valores de  $a_n$ ,  $b_n$  e  $R_n^2$  para  $n = 11, 13, 15, 17$  e  $19$ . O que nos permitiu preencher a seguinte tabela:

Valores aproximados usando método dos mínimos quadrados na função Ln			
Malha (nxn)	$a_n$	$b_n$	$R_n^2$
9x9	182,69	4,217	0,9867
11x11	251,59	5,564	0,9596
13x13	365,80	7,854	0,9410
15x15	305,30	7,979	0,9416
17x17	229,68	6,367	0,9329
19x19	436,20	9,433	0,8635

Figura 5.13: construída pelo autor

Podemos observar logo abaixo na figura 5.6 uma tabela construída com os valores de  $a_9$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{15}$ ,  $a_{17}$ ,  $a_{19}$  e respectivamente com os valores de  $b_9$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{13}$ ,  $b_{15}$ ,  $b_{17}$  e  $b_{19}$ . Para cada um desses temos associados as estimativas para os valores da probabilidades  $p = 0.1, \dots, 0.9$ . Preenchemos, assim, todos os valores da tabela, utilizando o mesmo raciocínio e plotamos esses resultados no gráfico na figura 5.7.

$f_n(p) = a_n(p)^{b_n}$						
Probabilidade "p"	$a_9(p)^{b_9}$	$a_{11}(p)^{b_{11}}$	$a_{13}(p)^{b_{13}}$	$a_{15}(p)^{b_{15}}$	$a_{17}(p)^{b_{17}}$	$a_{19}(p)^{b_{19}}$
0,1	0,0111	0,0007	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
0,2	0,2061	0,0325	0,0012	0,0008	0,0081	0,0001
0,3	1,1396	0,3100	0,0286	0,0205	0,1076	0,0051
0,4	3,8336	1,5366	0,2740	0,2040	0,6721	0,0769
0,5	9,8237	5,3182	1,5811	1,2101	2,7827	0,6311
0,6	21,1925	14,6665	6,6199	5,1832	8,8842	3,5236
0,7	40,5973	34,5795	22,2152	17,7323	23,7065	15,0833
0,8	71,2934	72,6919	63,4042	51,4617	55,4757	53,1537
0,9	117,1546	139,9904	159,9080	131,7134	117,4332	161,4563

Figura 5.14: construída pelo autor - Tabela da função  $f_n(p)$

Podemos analisar o comportamento de cada função com suas respectivas malhas e probabilidades " $p$ " no gráfico logo abaixo na figura 5.7.



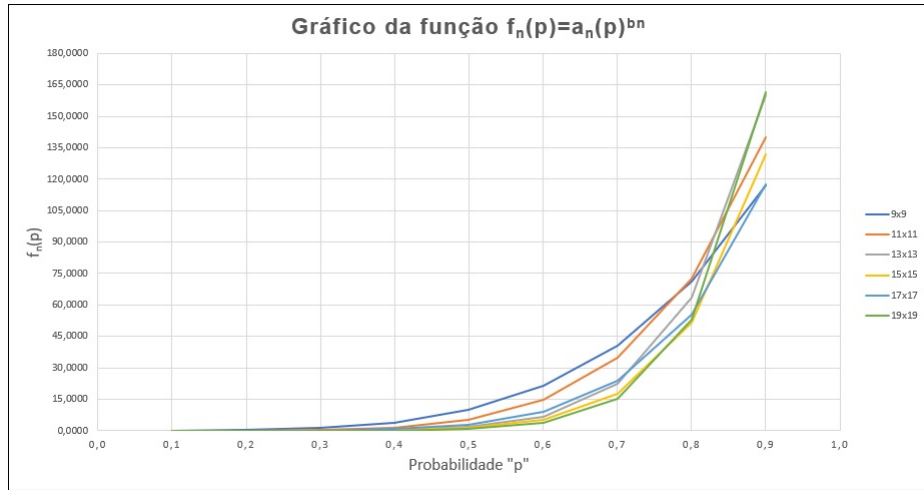


Figura 5.15: construída pelo autor - gráfico da função  $f_n(p)$

Nas demais malhas, observamos um padrão que não nos auxilia a uma conclusão precisa sobre o comportamento dos fluidos no que diz respeito a haver uma probabilidade positiva de existir um caminho do centro até o infinito. Por outro lado, na sequência, analisamos para valores de “ $p$ ” fixos a chance de haver um caminho da origem até a fronteira com diferentes tamanhos de malhas.

### 5.3.3 Simulação do processo para $p$ fixo e variando $n$

Ao observarmos a figura 5.6, podemos concluir que quando aumentamos o número de malhas a quantidade de vezes que ocorreu a percolação numa probabilidade  $p = 0.3$ ,  $p = 0.4$ ,  $p = 0.5$  e  $p = 0.6$  vai diminuindo, observemos em  $p = 0.6$ , numa malha 9 por 9 de acordo com a figura 5.16, temos 31 percolações, na medida em que aumentamos a malha, com a mesma probabilidade, o número de percolações irá diminuindo. Obtemos certa estabilização nos números de percolações a partir de  $p = 0.7$ , conforme podemos observar na tabela de resultados das simulações computacionais na figura 5.8

RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS						
Probabilidade	Malhas (nxn), e quantidade de vezes que ocorreu a percolação					
" p "	9x9	11x11	13x13	15x15	17x17	19x19
0,1	0	0	0	0	0	0
0,2	0	0	0	0	0	0
0,3	1	0	0	0	0	0
0,4	4	1	0	0	0	0
0,5	9	7	1	0	0	0
0,6	31	22	9	4	7	2
0,7	42	36	37	23	31	32
0,8	70	81	73	72	71	75
0,9	94	94	97	94	89	95

Figura 5.16: construída pelo autor: Resultado geral das simulações

### 5.3.4 Simulação para um valor de probabilidade $p$ fixa em 0.5 com diferentes tipos de malhas.

Iniciaremos o estudo nessa seção com uma tabela e gráfico (figura 5.9), mostrando a partir do surgimento considerável dos caminhos percorridos do centro de nossa malha até a extremidade, ou seja, aos demais valores de probabilidade " $p$ " não obtivemos valores significativos para o começo das análises.

Simulação em diferentes malhas		
Probabilidade (p)	Malha	Percolou
0,5	9x9	9
0,5	11x11	7
0,5	13x13	1
0,5	15x15	0
0,5	17x17	0
0,5	19x19	0

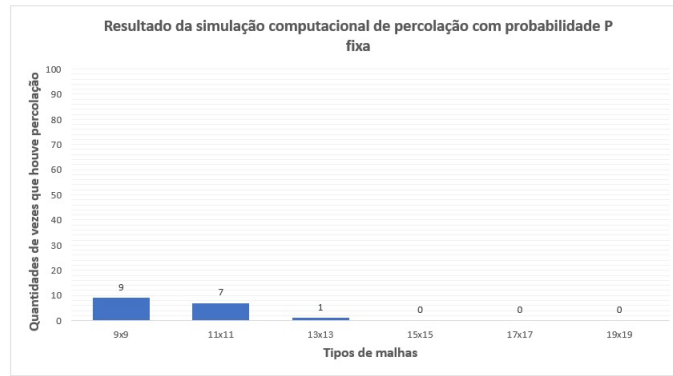


Figura 5.17: construída pelo autor

Como podemos observar a figura 5.9, a medida em que aumentamos o número de malhas, diminui a quantidade de caminho que parte do centro até a fronteira contudo, isso nos mostra que  $0,5 < p_c$ .

Conforme podemos observar, a figura 5.10 para os valores de  $p = 0.6$ ,  $p = 0.7$  e  $p = 0.8$ , tem um padrão de caminhos começa a ser traçado a partir da probabilidade  $p = 0.7$  em diante.

Simulação em diferentes malhas			Simulação em diferentes malhas			Simulação em diferentes malhas		
Probabilidade (p)	Malha	Percolou	Probabilidade (p)	Malha	Percolou	Probabilidade (p)	Malha	Percolou
0,6	9x9	31	0,7	9x9	42	0,8	9x9	70
0,6	11x11	22	0,7	11x11	36	0,8	11x11	81
0,6	13x13	9	0,7	13x13	37	0,8	13x13	73
0,6	15x15	4	0,7	15x15	23	0,8	15x15	72
0,6	17x17	7	0,7	17x17	31	0,8	17x17	71
0,6	19x19	2	0,7	19x19	32	0,8	19x19	75

Figura 5.18: construída pelo autor

Para ilustramos melhor a regularidade dos caminhos verificados do centro da malha até a fronteira, para diferentes tipos de malhas e com probabilidade  $p = 0.9$  observemos a figura 5.11 com a tabela e seu respectivo gráfico:

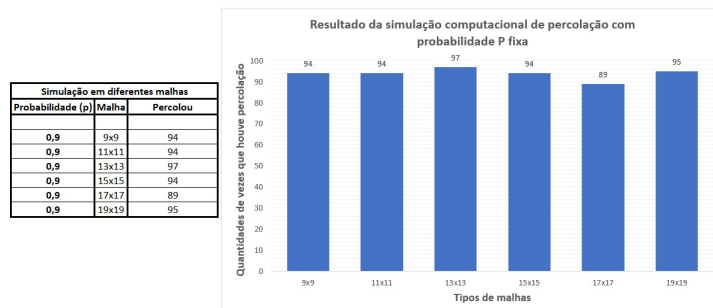


Figura 5.19: p fixo, malha 9x9

# Capítulo 6

## Conclusão

No processo original de Bernoulli no qual todos os elos têm a mesma chance de estarem abertos e independentes dos outros, a probabilidade crítica para haver percolação é  $p_c = 0.5$ . No nosso caso, o fluido vermelho de tamanho 1 tem uma probabilidade que é no máximo 0.5. Portanto, isso justifica o fato de não haver percolação da cor vermelha e o fluido de cor azul possuir dois elos, se comparado ao processo de Bernoulli a probabilidade crítica teria de ser menor que  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  (produto dos elos) que é aproximadamente 0,707. De fato, os resultados computacionais indicam que percolação ocorre para valores de  $p$  menores que 0.7. Ou seja, de certa maneira o nosso modelo não está sendo tão inovador. Porém, percebemos que algo pode acontecer se invertermos as probabilidades da binomial de parâmetros 2 e  $p$ , da seguinte maneira: se  $Y = 1$  com probabilidade  $2p(1 - p)$ , pintamos o fluido azul (dois elos) e com probabilidade  $p^2$ ,  $Y = 2$ , pintamos o fluido vermelho com apenas um elo. Se usarmos o raciocínio anterior, de tirarmos a raiz quadrada, um elo do fluido azul pode corresponder a uma probabilidade maior que 0,5, o que poderá indicar percolação e ao mesmo tempo o fluido vermelho pode ter uma probabilidade também maior que 0.5 (Esta observação nos parece ser válida, justamente por compararmos 1 ou 2 elos).

O nosso trabalho tem um prosseguimento natural o qual pode contribuir para desdobramentos interessantes. O modelo proposto inicialmente (com dependências) não aparenta ter comportamento diferente do de Bernoulli, mas surgiu a partir do trabalho uma nova proposta que pode vir a oferecer resultados mais interessantes.

# Referências Bibliográficas

- [1] BROADBENT, S., . H. J., 1957, *Percolation processes: I. Crystals and mazes*. Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society ed. Cambridge - Reino Unido.
- [2] COSTA, F. J., 2007, “Notas sobre Noções Topológicas de Circuitos para apoio a Análise de Circuitos”, .
- [3] DE SOUZA, A. L., 2013, *Toeria dos grafos e aplicações*. Amazonas - AM, UFAM - Instituto de Ciências Exatas.
- [4] FONTES, L. R. G., 2000, “Percolação - um modelo simples 'e interessante' para um meio poroso”, *Instituto de Matemática e Estatística*, v. Matemática Universitária, n. N° 28 - pp.1-17.
- [5] NETTO, P. O. B., 2012, *Grafos: Teoria, Modelo, Algoritmos*. Editora blucher ed. Rio de Janeiro - RJ, COPPE/UERJ.
- [6] NETTO, P. O. B., JURKIEWICK, S., 2011, *Grafos: Introduções e Práticas*. Editora blucher ed. Rio de Janeiro - RJ, COPPE/UERJ.
- [7] NICOLETTI, M. D. C., HRUSCHKA, E. R. J., 2013, *Fundamentos da teoria dos grafos para computação*. Edição revisada ed. São Carlos - SP, EdUFSCar.
- [8] SAMIRA, M. C. D. P., 2015, “Modelos Elementares de Percolação”, .
- [9] STEIF, J., *A minicourse on percolation theory*. <http://www.math.chalmers.se/~steif/perc.pdf>.
- [10] ÉLCIO, L., 2002, *O modelo de percolação em grafos: Um estudo de condições para a transição de fase*. Instituto de matemática e estatística da Universidade de São Paulo.

# Apêndice A

## Programas

### A.1 Programa gerador do grafo - ponte de Konigsberg ( Figura 1.2 )

```
1
2 import networkx as nx
3 import pandas as pd
4 import scipy as sp
5 from scipy import stats
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 import matplotlib.path as mpath
8 import matplotlib.patches as mpatches
9
10 Path = mpath.Path
11
12 fig, ax = plt.subplots()
13 pp1 = mpatches.PathPatch(
14 Path([(3, 5), (3, 4), (1.5, 3.5), (3, 3), (3, 2), (3, 2), (1.5,
15         3.5), (0.5, 0.5) ]),
16 [Path.MOVETO, Path.CURVE3, Path.CURVE3, Path.CURVE3, Path.
17     CURVE3,
18 Path.CURVE3, Path.CURVE3, Path.CLOSEPOLY]),
19 fc="none", transform=ax.transData)
20
21 ax.add_patch(pp1)
22 ax.plot([0.75], [0.25],)
23 ax.set_title('Modelagem da antiga ponte de konigsberg')
```

```

24 G=nx.Graph()
25 # Adicionar nos especificando suas posicoes
26 G.add_node('1', pos=(3, 5))
27 G.add_node('2', pos=(3, 2))
28 G.add_node('3', pos=(1.5, 3.5))
29 G.add_node('4', pos=(5.5, 3.5))
30
31
32
33 # Adicione bordas definindo peso e rotulo
34 G.add_edge('1','4',weight=1, )#label='0.2')
35 G.add_edge('1','2',weight=0, )#label='1.4')
36 G.add_edge('3','2',weight=0, )#label='0.9')
37 G.add_edge('3','4',weight=1, )#label='2.0')
38 G.add_edge('4','2',weight=1, )#label='2.0')
39
40 #Estrutura solida e tracejada das bordas e pontas
41 elarge=[(u,v) for (u,v,d) in G.edges(data=True) if d['weight']
         >0.5] # ( borda solida)
42 esmall=[(u,v) for (u,v,d) in G.edges(data=True) if d['weight']
         <=0.5] # (ponta tracejada)
43 #Recuperar as posicoes de nos de grafico e salvar em um
         dicionario
44 pos=nx.get_node_attributes(G,'pos')
45 # Desenha nos
46 nx.draw_networkx_nodes(G,pos,node_size=500, node_color='orange
         ')
47 # Desenha arestas
48 nx.draw_networkx_edges(G,pos,edgelist=elarge, width=1,
         edge_color='black') #cor das arestas com conexao
49 nx.draw_networkx_edges(G,pos,edgelist=esmall, arrows=False,
         width=1,
50 alpha=0.9,edge_color='b',style='') #cor das arestas sem
         coneao, dashed=tracejado
51 # Desenhar rotulos de no
52 nx.draw_networkx_labels(G,pos,font_size=18,font_family='sans -
         serif')
53 # Desenhar rotulos arestas
54 edge_labels =dict([(u, v), d['label']])
55 for u, v, d in G.edges(data=True)])
56 nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels=edge_labels)

```

```

57 plt.axis('on') #cor de fundo da imagem
58 #plt.savefig("communication_authority_graph.eps", format='eps'
    ) # save as eps
59 plt.show() # display

```

## A.2 Programa gerador do grafo - Relação de membros da família ( Figura 2.1 )

```

1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  """
3  Created on Wed Oct 04 18:12:19 2017
4
5  @author: Jaelson dos Santos
6  matricula: 20161007620
7  """
8
9  import networkx as nx
10 import pandas as pd
11 import scipy as sp
12 from scipy import stats
13 import matplotlib.pyplot as plt
14
15
16
17 G=nx.Graph()
18 # Adicionar nos especificando suas posicoes
19 G.add_node("Ana",      pos=(1, 4))
20 G.add_node("Marcos",   pos=(1, 2))
21 G.add_node("Aline",    pos=(5, 4))
22 G.add_node("Max",      pos=(5, 2))
23
24
25
26 # Adicione bordas definindo peso e rotulo
27 G.add_edge("Ana","Marcos",weight=1, )#label='0.2')
28 G.add_edge("Marcos","Ana",weight=1, )#label='1.4')
29 G.add_edge("Aline","Ana",weight=1, )#label='0.9')
30 G.add_edge("Ana","Aline",weight=1, )#label='2.0')
31 G.add_edge("Marcos","Max",weight=1, )#label='2.0')
32 G.add_edge("Max","Ana",weight=1, )#label='2.0')
33

```



```

34 #Estrutura solida e tracejada das bordas e pontas
35 elarge=[(u,v) for (u,v,d) in G.edges(data=True) if d['weight']
           >0.9] # ( borda solida)
36 esmall=[(u,v) for (u,v,d) in G.edges(data=True) if d['weight']
           <=0.9] # (ponta tracejada)
37 #Recuperar as posicoes de nos de grafico e salvar em um
           dicionario
38 pos=nx.get_node_attributes(G,'pos')
39 # Desenha nos
40 nx.draw_networkx_nodes(G,pos,node_size=2500, node_color='
           orange')
41 # Desenha arestas
42 nx.draw_networkx_edges(G,pos,edgelist=elarge, width=1,
           edge_color='black') #cor das arestas com conexao
43 nx.draw_networkx_edges(G,pos,edgelist=esmall, arrows=False,
           width=1,
44 alpha=0.1,edge_color='b',style='--') #cor das arestas sem
           conexao, dashed=tracejado
45 # Desenhar rotulos de no
46 nx.draw_networkx_labels(G,pos,font_size=12,font_family='sans-
           serif')
47 #Desenhar rotulos arestas
48 edge_labels =dict([(u, v), d['label']])
49 for u, v, d in G.edges(data=True)])
50 nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels=edge_labels)
51 plt.axis('on') #cor de fundo da imagem
52 #plt.savefig("communication_authority_graph.eps", format='eps'
           ) # save as eps
53 plt.show() # display

```